INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

ELEKTRODYNAMIK SS 2012

6. Übungsblatt Abgabe: Do., 10.05.2012 bis 09.45 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

16. **Elektromagnetische Potentiale** **(8 Punkte)**

In dieser Aufgabe soll das Rechnen mit den elektromagnetischen Potentialen $(\underline{A}, \Phi)$ geübt werden.

(a) Gegeben sei das Vektorpotential

$$\underline{A}_1 = ((6x-1)y + z, 3x^2 - z + x, x - y).$$

Bestimmen Sie das magnetische Feld. Geben Sie die Quellen und Wirbel von $\underline{B}$ an. Das Vektorpotential legt das elektrische Feld noch nicht fest. Welche Bedingungen an das elektrische Feld ergeben sich hier aus den Maxwellschen Gleichungen? Berechnen Sie div$\underline{A}$. Geben Sie eine Eichtransformation an, so dass die Coulomb-Eichung erfüllt ist.

(b) Betrachten Sie jetzt folgende Potentiale:

$$\underline{A}_2 = a\,c\,(-z^2/2 + 2x + z, (x+2)y, x); \quad \Phi = -ac^3 xt; \quad a = \text{const.}$$

Berechnen Sie $\underline{E}$ und $\underline{B}$ sowie die Wirbel und Quellen der Felder. Skizzieren Sie $\underline{E}$ und $\underline{B}$. Was erhalten Sie für die Stromdichte $\underline{j}$ und die Ladungsdichte ρ? Erfüllen das Vektorpotential $\underline{A}$ und das skalare Potential Φ die Lorentzeichung? Wenn nicht, geben Sie eine Eichtransformation $(\underline{A}, \Phi) \to (\underline{A}', \Phi')$ an, so dass $\underline{A}'$ und Φ' die Lorentzeichung erfüllen.

17. **Multipolentwicklung des Poisson-Integrals** **(12 Punkte)**

Wir betrachten erneut die durch

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \tag{1}$$

gegebene Lösung der Poisson-Gleichung. Die Ladungsdichte $\rho(\underline{r}')$ soll dabei nur in einem endlichen Raumbereich ungleich Null sein. Der Punkt $\underline{r}$ soll außerhalb dieses Raumbereichs in einer größeren Entfernung liegen. Wir wählen das Koordinatensystem so, daß der Koordinatenursprung in dem Bereich liegt, in dem die Ladungen sind.

(a) Entwickeln Sie $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ bis zur zweiten Ordnung um $\underline{r}' = 0$. Zeigen Sie damit, dass sich das Potential Φ näherungsweise in der Form

$$4\pi\epsilon_0 \Phi = \sum_{i=0}^{2} \tilde{\Phi}_i \tag{2}$$

darstellen läßt, wobei die einzelnen Terme der Entwicklung wie folgt lauten:

$$\tilde{\Phi}_0 = \frac{Q}{r} \quad \text{mit} \quad Q = \int \mathrm{d}^3 r' \, \rho\left(\underline{r}'\right) \quad ; \tag{3}$$

$$\tilde{\Phi}_1 = \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{r^3} \quad \text{mit} \quad \underline{p} = \int \mathrm{d}^3 r' \, \rho\left(\underline{r}'\right) \underline{r}' \quad ; \tag{4}$$

$$\tilde{\Phi}_2 = \frac{\underline{r}^T \cdot \underline{\underline{q}} \cdot \underline{r}}{2r^5} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{q}} = \int \mathrm{d}^3 r' \, \rho\left(\underline{r}'\right) \left[3\underline{r}' \otimes \underline{r}' - \left(r'\right)^2 \underline{\underline{1}}\right] \quad . \tag{5}$$

Der Vektor $\underline{p}$ ist das *Dipolmoment* der Ladungsverteilung. Der Tensor $\underline{\underline{q}}$ wird als *Quadrupolmoment* bezeichnet.

(b) Nun sollen als Beispiel noch Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment sowie die entsprechden Beiträge zum Potential $\Phi(\underline{r})$ der folgenden Ladungsverteilungen berechnet werden

i. Vier Punktladungen q auf den Eckpunkten eines Quadrates der Seitenlänge $2a$ mit alternierendem Vorzeichen

ii. Homogen geladene Kugelschale mit Radius R, deren Mittelpunkt im Ursprung liege.

iii. Zylinder mit Radius R und Länge L, der mit der Ladungsdichte

$$\rho(\underline{r}) = \{c\, x_3\, ;\, c = \text{const für } - L/2 \leq x_3 \leq L/2 \text{ und } x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\} \tag{6}$$

belegt ist.