Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

ELEKTRODYNAMIK SS 2012

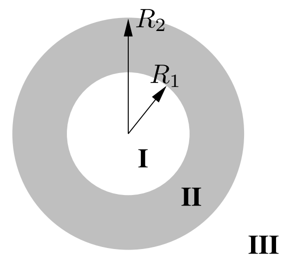
5. Übungsblatt Abgabe: Do., 03.05.2012 bis 09.45 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

13. **Kugelsymmetrische Ladungsverteilung** **(12 Punkte)**

Das Grundproblem der Elektrostatik ist das Lösen der Poissongleichung $\partial_{\underline{x}}^2 \Phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})$ unter gegebenen Randbedingungen. Als Beispiel betrachten wir die folgende Ladungsdichte $\rho(\underline{r})$; $\underline{r} \in \mathbb{R}^3$:

$$\rho(\underline{r}) = \begin{cases} 0 & |\underline{r}| < R_1 \\ \rho_0 = \text{const} \quad \text{für} & R_1 \leq |\underline{r}| \leq R_2 \\ 0 & R_2 < |\underline{r}| \end{cases}$$



und die Dirichlet-Randbedingungen

$$\lim_{|\underline{r}|\to\infty} \Phi(\underline{r}) = 0\,; \qquad \Phi(\underline{r})|_{|\underline{r}|=R_1} = \frac{C_1}{R_1}; \qquad \Phi(\underline{r})|_{|\underline{r}|=R_2} = \frac{C_2}{R_2}.$$

Außerdem soll das Potential stetig bei $|\underline{r}| = R_1$ bzw. $|\underline{r}| = R_2$ sein.

(a) Begründen Sie, dass in diesem Beispiel das Potential nur eine Funktion von $r = |\underline{r}|$ ist. Zeigen Sie, dass sich die Poissongleichung auf eine gewöhnliche DGL 2. Ordnung reduziert und lösen Sie diese allgemein. Geben Sie das Potential Φ und das elektrische Feld $\underline{E}$ in den Bereichen I, II und III an.
Hinweis: Verwenden Sie dafür die Poissongleichung in sphärischen Polarkoordinaten.

(b) Verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannte Lösungsformel für die Poissongleichung

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3\underline{r}'\,\frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}; \quad \text{für} \quad \rho(\underline{r}) = 0 \;\text{ für }\; \underline{r} \notin V.$$

um das Potential $\Phi(\underline{r})$ in den Raumbereichen I,II und III anzugeben.

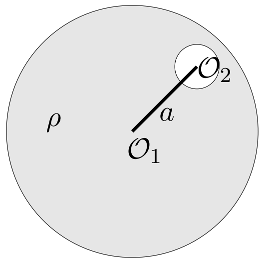
(c) Nutzen Sie die Symmetrie des Problems aus, um das elektrische Feld $\underline{E}$ direkt mit Hilfe des Gaußschen Satzes in den Raumbereichen I,II und III zu berechnen.

(d) Skizzieren Sie Φ und $\underline{E}$ als Funktion von $|\underline{r}|$ für $R_1 = 0$ und $R_2 = R$.

Bitte wenden ⟶

14. **Superpositionsprinzip** **(3 Punkte)**

Eine Kugel mit Radius R_1 ist mit Ausnahme eines kugelförmigen Hohlraums mit der konstanten Ladungsdichte ρ aufgeladen. Der Hohlraum hat den Radius R_2, sein Mittelpunkt $\mathcal{O}_2$ befindet sich in der Entfernung a vom Mittelpunkt $\mathcal{O}_1$ der großen Kugel. Berechnen Sie das elektrische Feld $\underline{E}$ sowie das Potential Φ in einem beliebigen Punkt im Inneren des Hohlraums. Welchen Wert hat Φ im Mittelpunkt der Hohlkugel?
Hinweis: Benutzen Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 13.



15. **Poisson-Integral für eine Flächenladungsdichte** **(5 Punkte)**

Der Bereich $\{\underline{r}\,|\,R_1 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R_2; x_3 = 0; R_1, R_2 > 0\}$ ($\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)$) ist mit einer konstanten Flächenladungsdichte σ belegt. Berechnen Sie das Potential Φ und das elektrische Feld $\underline{E}$ auf der x_3-Achse. Was erhalten Sie für $\underline{E}$ in den Grenzfällen (i) $R_1 \to 0$; (ii) $R_2 \to \infty$, (iii) $R_1 \to 0, R_2 \to \infty$? Skizzieren Sie für Fall (iii) den Feld- und Potentialverlauf.