



10. Greensche Funktion der Wellen-Gleichung

(15 Punkte)

Die Poisson-Gleichung

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi(\underline{r}) = -\rho(\underline{r}) \quad (1)$$

 ergibt sich als Grenzfall $v \rightarrow \infty$ der Wellengleichung

$$\square \Phi(\underline{r}, t) = \partial_{\underline{x}}^2 \Phi(\underline{r}, t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \Phi(\underline{r}, t) = -\rho(\underline{r}, t) \quad (2)$$

Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung der allgemeinen Lösung von Gl. (2) über die Fourier-Transformation. Unter der Fouriertransformation $\hat{T}_F$ einer Funktion $f(\underline{r}, t) \mapsto f(\underline{k}, \omega)$ verstehen wir den Ausdruck

$$\hat{T}_F = \mathcal{F}(k_x, k_y, k_z, \omega) = \mathcal{F}(\underline{k}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^4}} \int f(\underline{r}, t) e^{-i(\underline{k}\underline{r} + \omega t)} dV dt. \quad (3)$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\left(\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) \Phi(\underline{k}, \omega) = \rho(\underline{k}, \omega) \quad (4)$$

 gilt, wenn $\Phi(\underline{r}, t)$ und $\rho(\underline{r}, t)$ die Wellen-Gleichung erfüllen.

(b) Zeigen Sie, daß die Rücktransformation von Gleichung (4) auf die Form

$$\Phi(\underline{r}, t) = \int G(\underline{r} - \underline{r}', t - t') \rho(\underline{r}', t') dV' dt' \quad (5)$$

 führt und geben Sie die Greensche Funktion $G(\underline{r} - \underline{r}', t - t')$ an.

 (c) Nun soll $G(\underline{r} - \underline{r}', t - t')$ berechnet werden. Führen Sie dazu die Integration in Kugelkoordinaten im k -Raum durch. Als Zwischenergebnis sollten Sie

$$G = \frac{1}{4\pi^3} \int \frac{\sin k\zeta}{k\zeta} \frac{e^{i\omega\tau}}{k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}} k^2 dk d\omega \quad (6)$$

erhalten. Hierbei wurden die Abkürzungen

$$\zeta = |\underline{\zeta}| = |\underline{r} - \underline{r}'| \quad \text{und} \quad \tau = t - t'$$

benutzt.

(d) Zeigen Sie, dass die ω -Integration

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}} d\omega = 2\pi v \frac{\sin kv\tau}{k} \quad (7)$$

ergibt.

(e) Führen Sie nun die k -Integration durch. Zeigen Sie dazu zunächst

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega x d\omega \quad . \quad (8)$$

(f) Zeigen Sie, dass man als Endergebnis für die Lösung der Wellengleichung (2)

$$\Phi(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{v}\right)}{|\underline{r} - \underline{r}'|} dV' \quad (9)$$

erhält und interpretieren Sie dieses Ergebnis.

11. Legendre-Polynome

(5 Punkte)

Wir betrachten zwei konzentrische Kugelschalen mit Radien $R_1 < R_2$. Bestimmen Sie die Lösung der Laplace-Gleichung $\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = 0$ im ganzen Raum, wenn die folgenden Randbedingungen gegeben sind:

$$\Phi(|\underline{r}| = R_1) = A \quad ; \quad \Phi(|\underline{r}| = R_2) = B \cos \theta \quad ; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r, \theta) = 0 \quad . \quad (10)$$

Mit A und B werden Konstanten bezeichnet. Verwenden Sie den Ansatz

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (11)$$

mit den Legendre-Polynomen P_l . Stellen Sie Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten a_l, b_l auf und bestimmen Sie diese.

12. CGS-Einheiten

In vielen Lehrbüchern wird anstelle des SI-Einheitensystem das CGS-System benutzt. Geben Sie die Maxwell-Gleichungen und die Lorentzkraft in beiden Systemen an.