INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

3. Übungsblatt Präsenzübung

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

Einleitendes zur Poisson- und Laplace-Gleichung

Die *Poisson*-Gleichung

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi(\underline{r}) = -\frac{\varrho(\underline{r})}{\epsilon_0} \tag{1}$$

erlaubt die Berechnung des elektrischen Potentials $\Phi(\underline{r})$ einer beliebigen Ladungsverteilung $\varrho(\underline{r})$. Ist man jedoch nur am Potential in einem ladungsfreien Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ interessiert, so wird aus der Poisson-Gleichung die *Laplace*-Gleichung (bei uns meistens mit *Dirichlet*-Randbedingungen),

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_{\underline{x}}^2 \Phi & = & 0 & \text{in } \Omega \\ \Phi & = & f(\underline{r}) & \text{auf } \partial\Omega \end{array} \right. \quad ; \tag{2}$$

wobei $f(\underline{r})$ eine stetige Funktion auf $\partial\Omega$ beschreibt. Im Folgenden wollen wir die Lösung der Laplace-Gleichung für kartesische-, Polar- und Zylinderkoordinaten bestimmen.

7. **Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten**

Wir betrachten die Laplace-Gleichung $\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = 0$ im Gebiet

$$\mathcal{G} = \{\underline{r} \,|\, 0 \leq x_1 \leq a;\, 0 \leq x_2 \leq b\} \quad .$$

(a) Geben Sie $\Phi(\underline{r})$ allgemein mit Hilfe des Separationsansatzes $\Phi(x_1, x_2) = U_n(x_1)W_n(x_2)$ an. Zeigen Sie dazu, dass $U_n(x_1)$ und $W_n(x_2)$ gewöhnliche Differentialgleichungen erfüllen und lösen Sie diese allgemein. Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung hat dann die Form:

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_n U_n(x_1)W_n(x_2).$$

(b) Arbeiten Sie nun die Randbedingungen

$$\Phi(0, x_2) = \Phi(a, x_2) = 0 \quad ; \quad \Phi(x_1, 0) = 0$$

in Ihre Lösung aus (a) mit ein und bestimmen Sie die Integrationskonstanten.

(*) Eine weitere Randbedingung sei

$$\Phi(x_1, b) = B_0 \sin(\frac{3\pi}{a} x_1) \quad .$$

Bestimmen Sie nun die verbleibenden Integrationskonstanten.
Hinweis: Nutzen Sie die die Orthogonalitätsrelationen für die trigonometrischen Funktionen.

8. **Laplace-Gleichung für zylindersymmetrische Probleme**

Die Laplace-Gleichung $\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = 0$ soll für den Spezialfall einer zylindersymmetrischen Geometrie gelöst werden. Die prinzipielle Vorgehensweise ist Ihnen aus der Quantenmechanik von der Behandlung des Wasserstoffatoms bekannt.

(a) Leiten Sie mit dem Separationsansatz $\Phi(\underline{r}) = P(\cos\theta)\, Q(\phi)\, U(r)/r$ aus der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r^2\Phi(\underline{r})\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi(\underline{r})}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi(\underline{r})}{\partial\phi^2} = 0 \qquad (3)$$

gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen $P(\cos\theta), Q(\phi)$ und $U(r)$ ab. Zeigen Sie: $Q(\phi) = \exp(im\phi)$. Warum sind nur die Werte $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ zugelassen?

(*) Wir betrachten im folgenden zylindersymmetrische Lösungen von $\Delta\Phi(\underline{r}) = 0$, d.h., $m = 0$. Für $P(\cos\theta)$ sollten Sie jetzt die DGL

$$(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \lambda P(x) = 0; \quad x = \cos\theta \qquad (4)$$

erhalten. λ ist eine Konstante. Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l; \quad l \in \mathbb{N} \qquad (5)$$

die DGL (4) lösen. Geben Sie die fünf niedrigsten $P_l(x)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass $U(r) = a_l r^{l+1} + \frac{b_l}{r^l}$ die allgemeine Lösung der Radialgleichung (also der DGL für $U(r)$) ist.

(c) Die Legendre-Polyome $\{\tilde{P}_l(x) := \sqrt{(2l+1)/2}\, P_l(x);\ l \in \mathbb{N}\}$ bilden einen *vollständigen* Satz *orthonormierter* Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$. Das bedeutet, dass sich Funktionen $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ als Linearkombination der $\tilde{P}_l$ darstellen lässen:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \tilde{P}_l(x).$$

Stellen sie $f(x) = x^3$ als Linearkombination der $\tilde{P}_l(x)$ dar.
Hinweis: Ansatz $x^3 = \sum_{l=0}^{3} P_l(x)$; Koeffizientenvergleich!.

Allgemein lässt sich das Potential $\Phi(\underline{r})$ für zylindersymmetrische Problem demnach darstellen als

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta) \quad . \qquad (6)$$

9. **Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten**

In Polarkoordinaten $\underline{r} = (r,\phi)$ lässt sich die Laplace-Gleichung analog zu den oben behandelten Problemen lösen. Zeigen Sie, dass der Separationsansatz $\Phi(r,\phi) = U(r)Q(\phi)$ auf die allgemeine Lösung

$$\Phi(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n r^{n+1} + \frac{b_n}{r^n}\right)(c_n\cos(n\phi) + d_n\sin(n\phi)) \qquad (7)$$

führt.