INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

ELEKTRODYNAMIK SS 2012

1. Übungsblatt Präsenzübung

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

1. **Integralsätze von Stokes und Gauß**

(a) Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2x_2 + 2x_1x_3 \\ 3x_1 \\ x_3^3 + x_1^2 \end{pmatrix}$$

und die Fläche $F = \big(\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)\,|\,(x_1/3)^2 + (x_2/2)^2 \leq 1\,;\, x_3 = 0\big)$.

(b) Verifizieren Sie den Satz von Gauß für das Vektorfeld

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 10x_2^3 \\ 11x_3 + 2x_1 - 2x_2^2 \\ 4x_2x_3 \end{pmatrix}$$

und die Kugel $K = \big(\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)\,|\,x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2\big)$.

2. **Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen**

Die wichtigsten Eigenschaften rotationsfreier Vektorfelder sollen wiederholt werden.

(a) Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}(-x_2\underline{e}_1 + x_1\underline{e}_2) \quad \text{mit} \quad \underline{r} = (x_1, x_2, x_3) \quad . \tag{1}$$

Zeigen Sie: $\partial_{\underline{x}} \times \underline{A}(\underline{r}) = 0$ für $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. Berechnen Sie außerdem das Linienintegral $\oint_C \underline{A} \cdot \mathrm{d}\underline{r}$, wobei C der Rand eines Kreises mit Radius R und Mittelpunkt $\underline{M} = a\underline{e}_3$ ist. Der Vektor $\underline{e}_3$ steht senkrecht auf der von C eingeschlossenen Kreisfläche.

(b) Zeigen Sie, daß die Rotation des Vektorfeldes

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\underline{r}}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \tag{2}$$

für alle $|\underline{r}| \neq 0$ verschwindet. Betrachten Sie dann eine Kugel mit Radius R, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt. Verifizieren Sie die Beziehung $\oint_C \underline{B} \cdot \mathrm{d}\underline{r} = 0$ für die Kurven mit $|\underline{r}| = R$ und $\underline{r} \cdot \underline{e}_3 = b$.

(c) Offensichtlich haben beide Vektorfelder eine verschwindende Rotation unter den angegebenen Voraussetzungen. Sind beide Felder konservativ? Kommentieren Sie Ihre Antwort.

Bitte wenden ⟶

3. **Differentialoperatoren I**

   Es sei Ψ ein skalares Feld; $\underline{A}$ und $\underline{B}$ seien Vektorfelder. Zeigen Sie unter Benutzung von Komponentenschreibweise und Einsteinscher Summenkonvention:

   (a) $\partial_{\underline{x}} \cdot (\Psi \underline{A}) = \Psi\, \partial_{\underline{x}} \cdot \underline{A} + \underline{A} \cdot \partial_{\underline{x}} \Psi \quad ;$

   (b) $\partial_{\underline{x}} \times (\Psi \underline{A}) = \Psi\, \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} - \underline{A} \times \partial_{\underline{x}} \Psi \quad ;$

   (c) $\partial_{\underline{x}} \times \left(\partial_{\underline{x}} \times \underline{A}\right) = \partial_{\underline{x}} \left(\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{A}\right) - \partial_{\underline{x}}^2 \underline{A} \quad ;$

   (d) $\partial_{\underline{x}} \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} - \underline{A} \cdot \partial_{\underline{x}} \times \underline{B} \quad .$

4. **Differentialoperatoren II**

   Es sei $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)$ und $r = |\underline{r}|$. Unter der Annahme, daß $\underline{B}$ nicht von $\underline{r}$ abhängt, berechne man

   (a) $\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{r} \quad ;$

   (b) $\partial_{\underline{x}} \frac{1}{r}$ für $r \neq 0 \quad ;$

   (c) $\partial_{\underline{x}} \times \left(\frac{1}{2} \underline{B} \times \underline{r}\right) \quad ;$

   Benutzen Sie wiederum die Komponentenschreibweise und die Summenkonvention.

Klausurtermin (vorläufig): 3. August 2012 (2. Termin: 2. Oktober 2012)

Teilnahmevoraussetzungen: 50 % der Hausaufgabenpunkte. Zusätzlich muss in den Übungen einmal eine Aufgabe erfolgreich vorgerechnet werden. Es besteht jedoch keine Anwesenheitspflicht in den Übungen.

Fragen an:

Hendrik Kriegel	h.kriegel@tu-bs.de	Raum A 317

Link:

http://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/sose12/edyn12