

1. Residuensatz: Beispiele (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie ($z \in \mathcal{C}$):

$$\oint_C \frac{1}{z^6 + 1} dz,$$

wobei sich C aus den Teilstücken $C_1 = \{z \mid |z| = R; \operatorname{Im} z > 0; R > 0\}$ und $C_2 = \{z \mid -R \leq \operatorname{Re} z \leq R; \operatorname{Im} z = 0\}$ zusammensetzt.

(b) Berechnen Sie ($z \in \mathcal{C}$):

$$\oint_C \frac{e^{ikz}}{z^2 + a^2} dz; \quad a, k \text{ reell,}$$

wobei die Kurve C der Kreis mit Radius $|z| = 2|a|$ ist

2. Greensche Funktion des d'Alembert-Operators (14 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir uns eine partikuläre Lösung der Wellengleichung

$$\square \Phi(\vec{r}, t) = \Delta \Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\vec{r}, t) = -4\pi \rho(\vec{r}, t)$$

verschaffen. Gesucht ist die Greensche Funktion, die

$$\square G(\vec{r}, t) = \Delta G(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\vec{r}, t) = -4\pi \delta(\vec{r}, t)$$

erfüllt.

(a) Zeigen Sie, dass für die Fouriertransformierte

$$G(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{r}^3 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} G(\vec{r}, t)$$

gilt:

$$G(\vec{k}, \omega) \propto \frac{1}{\omega^2 - k^2 c^2}. \quad (1)$$

(b) Führen Sie zuerst die Fourier-Rücktransformation von (??) bezüglich ω aus. Dazu bietet es sich an, ω als komplexe Zahl anzunehmen und den Residuensatz zu verwenden. Die Integrationskontur in der komplexen Ebene schlieÙe

die reelle Achse ein und wird entweder durch einen Halbbogen in der unteren (Kontur C) oder oberen Halbebene (Kontur C') geschlossen. Die Pole von $G(\vec{k}, \omega)$ liegen auf der reellen Achse. Um Singularitäten zu vermeiden, nehme man in Gleichung (??) die Ersetzung $\omega \rightarrow \omega + i\eta; \eta > 0$ vor. Nach der Integration bilde man den Grenzwert $\eta \rightarrow 0$. Skizzieren Sie C, C' und die Pole des Integranden. Integrieren Sie entlang der Kontur C .

Hinweis: Überlegen Sie sich, für welche Zeiten t das Integral entlang C bzw. C' existiert.

- (c) Die Rücktransformation bezüglich $\vec{k}$ in den Ortsraum führt man am einfachsten mit Hilfe von sphärischen Polarkoordinaten im $\vec{k}$ -Raum aus. Legen Sie die k_z -Achse parallel zu $\vec{r}$.
- (d) Interpretieren Sie die Zeitabhängigkeit Ihres Ergebnisses für $G(\vec{r}, t)$. Was erhält man, wenn man entlang C' integriert?