

1. Levi-Civita Tensor (4 Punkten)

Ausgehend von der Definition des Levi-Civita Tensors in drei Dimensionen

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) = (1, 2, 3) \text{ und zyklisch} \\ -1 & (i, j, k) = (1, 3, 2) \text{ und zyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beweisen Sie dass

$$\text{a) } \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6, \text{ b) } \epsilon_{ijk}\epsilon_{\alpha jk} = 2\delta_{i\alpha}, \text{ c) } \epsilon_{ijk}\epsilon_{\alpha\beta k} = \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} - \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}$$

2. Coulomb-Potenzial (6 Punkten)

Das Coulomb-Potenzial lautet:

$$\Phi = \frac{\alpha}{|\vec{r}|} \quad \text{mit} \quad |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

- (a) Geben Sie das Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi(r)$ in Kugelkoordinaten an.
- (b) Skizzieren Sie die Feldlinien und die Äquipotenzialflächen.
- (c) Ermitteln Sie $\Delta\Phi(\vec{r})$ für $|\vec{r}| > 0$ und verifizieren Sie den Gaußschen Satz

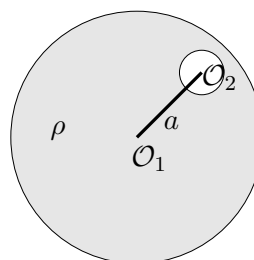
$$\int_K d\vec{r}^3 \operatorname{div} \vec{E} = \oint_{\partial K} \vec{E} \cdot d\vec{f}$$

für das Vektorfeld $\vec{E}$ und die Gebiete $K = \{\vec{r} | 0 < \epsilon < |\vec{r}| \leq R\}$ bzw. $K = \{\vec{r} | |\vec{r}| \leq R\}$. Geben Sie $\Delta\Phi(\vec{r})$ bzw. $\operatorname{div} \vec{E}$ für beliebige $\vec{r}$ an.

3. Superpositionsprinzip (6 Punkten)

Eine Kugel mit Radius R_1 ist mit Ausnahme eines kugelförmigen Hohlraums mit der konstanten Ladungsdichte ρ aufgeladen. Der Hohlraum hat den Radius R_2 , sein Mittelpunkt $\mathcal{O}_2$ befindet sich in der Entfernung a vom Mittelpunkt $\mathcal{O}_1$ der großen Kugel. Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ sowie das Potential Φ in einem beliebigen Punkt im Inneren des Hohlraums. Welchen Wert hat Φ im Mittelpunkt der Hohlkugel?

Hinweis: wie üblich soll das Potential der gesamten Anordnung im Unendlichen verschwinden.



4. Kontinuitätsgleichung (4 Punkten)

Betrachten Sie eine diskrete Verteilung von Punktladungen

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

mit zeitabhängigen Orten $\vec{r}_i(t)$ der Ladungen $q_i(t)$. Was folgt aus der Kontinuitätsgleichung für $q_i(t)$?