INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. N. Perkins

KLASSISCHE FELDTHEORIE SoSe 2007

2. Übungsblatt Abgabe: **Dienstag, den 24.4.2007, bis 9.35 Uhr, HA-Kiste bei A316**

1. **Krummlinige, nicht-orthogonale Koordinaten (12 Punkten)**
   Als Beispiel für krummlinige und nicht-orthogonale Koordinaten u^1, u^2, u^3 betrachten wir (x^1, x^2, x^3 sind kartesische Koordinaten):
   $$x^1 = a\,u^1 \cos(u^2); \quad x^2 = b\,u^1 \sin(u^2); \quad x^3 = c\,u^3\,; \quad a, b, c \neq 0.$$
   (a) Bestimmen Sie die normierte Basis $\vec{e}_i$ der T angentialvektoren $\vec{e}_i = \vec{t}_i / \left|\vec{t}_i\right|$ auf, wobei $\vec{t}_i = \partial\vec{x}/\partial u^i$. Dies ist die sog. *kovariante* Basis.
   (b) Fr zwei Vektoren $\vec{a} = a^i\vec{e}_i$ und $\vec{b} = b^j\vec{e}_j$ (Einstein'sche Summenkonvention !) sind a^i und b^j die sog. *kontravarianten* Komponenten. Fr das gewhnliche Skalarprodukt gilt $\vec{a}\cdot\vec{b} = g_{ij}a^ib^j$, wobei g_{ij} die *(kovariante) euklidische* Metrik ist. Bestimmen Sie im vorliegenden Fall g_{ij}.
   (c) Zu jeder kovarianten Basis gibt es eine *kontravariante* Basis $\vec{e}^j$, mit $\vec{e}^i\cdot\vec{e}_j = \delta^i_j$. Dabei ist δ^i_j das Kronecker Symbol. Bestimmen Sie $\vec{e}^i$ im vorliegenden Fall. Hinweis: Betrachten Sie $\vec{e}_i \times \vec{e}_j/(\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3))$ fr $i, j = 1, 2;\ 1, 3;\ 2, 3$.
   (d) Der Vektor $\vec{b} = b^j\vec{e}_j$ lsst sich auch in *kovariante* Komponeneten $\vec{b} = b_j\vec{e}^j$ schreiben. Drcken Sie damit das gewhnliche Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$ allgemein mittels der kontravarianten(kovarianten) Komponenten von $\vec{a}(\vec{b})$ aus. Wie erhlt man b_j aus g_{ij} und b^j. (Zusatz, ausser Konkurrenz: Gibt es auch eine *(kontravariante) euklidische* Metrik? Wenn ja, wie lautet damit das Skalarprodukt?)
   (e) Skizzieren Sie die Koordinatenlinien in der x^1x^2-Ebene für $a = 1, b = 2$ und zeichnen Sie die kontra- und kovarianten Basisvektoren in den Punkten $(u^1, u^2) = (1, \pi/4)$ und $(u^1, u^2) = (1, \pi/2)$ ein. Welche Gleichungen beschreiben die Linien $u^1 = \text{const}$ bzw. $u^2 = \text{const}$ in kartesischen Koordinaten?
   (f) Bestimmen Sie den Laplace-Operator in den Koordinaten u^1, u^2, u^3.

2. **Lorentz-Transformation I (8 Punkten)**
   Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ haben zwei Inertialsysteme (IS) Σ und Σ' den gleichen Ursprung und parallele x_3-Achsen. Der Winkel zwischen der x_1- und der x'_1-Achse beträgt $\alpha > 0$ bei $t = t' = 0$. Geben Sie die Lorentz-Transformation zwischen diesen beiden Inertialsystemen in der Form $x'_\mu = f(x_1, x_2, x_3, t)$ an, wobei die Relativgeschwindigkeit aus der Sicht von Σ $\vec{v} = v_0\vec{e}_1$ ist.