INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

KLASSISCHE FELDTHEORIE — SOSE 2006

24. Übungsblatt — Abgabe: keine

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

79. **Senkrechter Einfall ebener Wellen auf eine Grenzfläche: Skin-Effekt**
In dieser Aufgabe soll die Transmission und Reflexion ebener Wellen beim Übergang vom Vakuum in einen Ohmschen Leiter diskutiert werden.

(a) Bestimmen Sie die Dispersionsrelation ebener elektromagnetischer Wellen in einem Ohmschen Leiter mit $\underline{j} = \sigma \underline{E}$ und konstantem σ. Die übrigen Materialparameter seien durch $\epsilon = \mu = 1$ festgelegt. Diskutieren Sie insbesondere den Grenzfall niederfrequenter Wellen und zeigen Sie, daß sich in diesem Fall für k näherungsweise die Beziehung

$$k \approx \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}}(1+i)$$

ergibt.

(b) Eine aus dem Vakuum kommende, ebene elektromagnetische Welle trifft bei $x_3 = 0$ senkrecht ($\underline{k} = k\underline{e}_3$) auf eine ebene Grenzschicht. Im Bereich $x_3 > 0$ befindet sich ein Ohmscher Leiter mit $\underline{j} = \sigma \underline{E}$, $\epsilon = 1, \mu = 1$ und $\rho = 0$.

i. Bestimmen Sie aus den Randbedingungen für die Felder bei $x_3 = 0$ die Amplituden der reflektierten und der transmittierten Welle.

ii. Zeigen Sie, daß die reflektierte und die transmittierte Welle gegenüber der einfallenden Welle phasenverschoben sind und geben Sie die Phasenverschiebungen an.

iii. Geben Sie reelle Lösungen für die Felder im Ohmschen Leiter an und berechnen Sie den Poynting-Vektor.

iv. Erläutern Sie in Worten, was man unter dem Skin-Effekt versteht. Nach welcher Länge d ist die Amplitude der Welle im Halbraum $x_3 > 0$ auf den $1/e$-Anteil abgefallen?

80. **Methode der Bildladungen**
Bei $x_1 = 0$ befinde sich eine unendlich ausgedehnte, geerdete Metallplatte. Bestimmen Sie das Potential $\Phi(\underline{r})$ im Bereich $x_1 > 0$, wenn am Ort $\underline{r}_0 = (d, 0, 0)$ mit $d > 0$ eine Punktladung Q vorhanden ist. Welche Randbedingung muß das Potential erfüllen?
Berechnen Sie außerdem die auf der Metalloberfläche influenzierte Flächenladungsdichte $\sigma(\underline{r})$ sowie die influenzierte Gesamtladung auf der Platte. Geben Sie die Kraft an, die die Metallplatte auf die Punktladung ausübt.

81. **Multipolentwicklung**

(a) Erläutern Sie kurz, was man unter der *Fernfeldnäherung* versteht.

(b) Geben Sie die Definition von Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment an. Wie lauten die Beiträge der einzelnen Momente zum Potential?

(c) Wir betrachten zwei Anordnungen von acht Punktladungen q_i, die sich an den Orten $\underline{r}_i$ befinden:

$$\underline{r}_1 = (-1,-1,-1) \quad ; \quad \underline{r}_2 = (1,-1,-1) \quad ; \quad \underline{r}_3 = (1,1,-1) \quad ; \quad \underline{r}_4 = (-1,1,-1) \quad ;$$

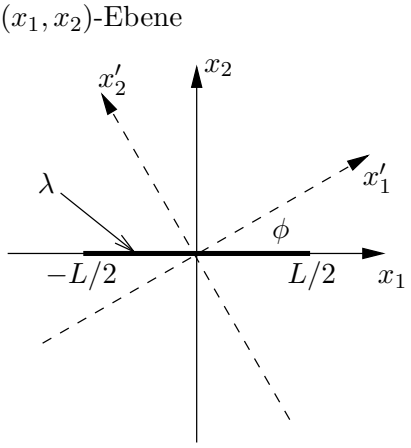
$$\underline{r}_5 = (-1,-1,1) \quad ; \quad \underline{r}_6 = (1,-1,1) \quad ; \quad \underline{r}_7 = (1,1,1) \quad ; \quad \underline{r}_8 = (-1,1,1) \quad .$$

In der ersten Anordnung tragen die Punkte mit den geraden Indices die positive Ladung q und die Punkte mit den ungeraden Indices die negative Ladung $-q$. In der zweiten Anordnung soll das Vorzeichen der Ladungen der ersten vier Punkte ausgetauscht sein.
Skizzieren Sie beide Ladungsanordnungen und berechnen Sie jeweils die Tensoren der Multipolentwicklung bis zum Tensor zweiter Stufe (Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment).

Rückseite beachten! ⟶

(d) Gegeben sei ein infinitesimal dünner Draht der Länge L, der die konstante Linienladungsdichte λ trägt.

i. Berechnen Sie das Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment bezüglich des Koordinatensystems K. Der Koordinatenursprung von K befinde sich im Mittelpunkt des Drahtes und der Draht liege auf der x_1-Achse (vgl. Skizze).



ii. Geben Sie das Quadrupolmoment außerdem bezogen auf ein Koordinatensystem K' an, dessen x_3'-Achse mit der x_3-Achse von K zusammenfällt und dessen x_1'-Achse den Winkel ϕ mit der x_1-Achse von K einschließt.

82. **Plattenkondensator**
Welche Energie U ist in einem Plattenkondensator (Plattenfläche A, Plattenabstand d, Gesamtladung auf den Platten $+Q$ und $-Q$) gespeichert? Gehen Sie von der Formel für die Energiedichte aus. Zeigen Sie, daß sich U als $U = Q^2/(2C)$ schreiben läßt, wobei C die Kapazität des Kondensators ist. Welche Arbeit muß verrichtet werden, um den Abstand der Platten zu verdoppeln?
Hinweis: Vernachlässigen Sie Randeffekte. Berechnen Sie zunächst das elektrische Feld innerhalb und außerhalb des Kondensators. Die Platten des Kondensators sollen nicht verbunden sein.

83. **Kugelkondensator**
Gegeben sei ein Kugelkondensator mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2. Die innere Kugelschale trage die Gesamtladung Q_1, die äußere die Gesamtladung Q_2. Im Bereich $R_1 < r < R$ mit $R < R_2$ befinde sich ein Dielektrikum mit konstanter Dielektrizitätszahl $\epsilon \neq 1$. Für $R < r < R_2$ gilt dagegen $\epsilon = 1$.

(a) Bestimmen Sie die Felder $\underline{E}$ und $\underline{D}$ im gesamten Raum.

(b) Zeigen Sie, daß das elektrische Feld ein Potential $\Phi(\underline{r})$ besitzt. Bestimmen Sie das Potential unter der Randbedingung $\lim_{r\to\infty} \Phi(\underline{r}) = 0$.

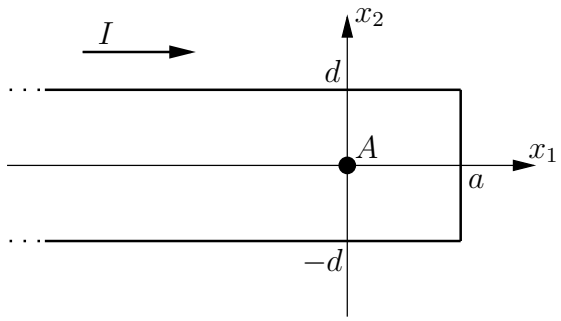
(c) Die Kugelschalen des Kondensators seien nun mit $Q_1 = -Q$ und $Q_2 = +Q$ aufgeladen.

i. Bestimmen Sie die Kapazität des Kugelkondensators.

ii. Wie groß ist die Energiedichte im Inneren des Kondensators? Welche Energie ist im Kondensator gespeichert?

Seite 3 beachten! $\longrightarrow$

84. **Stationäre Magnetfelder I: Gesetz von Biot-Savart**
Bestimmen Sie mit Hilfe des Gesetzes von Biot-Savart das Magnetfeld, das der in der Skizze dargestellte, vom konstanten Strom I durchflossene Draht im Punkt A erzeugt.



85. **Stationäre Magnetfelder II: Gesetz von Ampère**
Gegeben sei eine unendlich lange, dicht gewickelte Spule mit N Windungen pro Länge L und Radius R. Die Spule wird vom konstanten Strom I_1 durchflossen. Die Spulenachse sei die x_3-Achse. Entlang der Spulenachse verläuft ein unendlich langer Draht mit Radius r_0, auf dessen Oberfläche der Gesamtstrom I_2 in x_3-Richtung fließt.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gesetzes von Ampère die magnetische Induktion $\underline{B}_{\text{Draht}}$ bzw. $\underline{B}_{\text{Spule}}$ im gesamten Raum, wenn jeweils nur der Draht oder nur die Spule vorhanden ist. Geben Sie durch Superposition das Gesamtfeld an.

(b) Geben Sie die Energiedichte $u(\underline{r})$ des elektromagnetischen Feldes an, wenn Spule und Draht vorhanden sind. Bestimmen Sie die Gesamtenergie U im Volumen

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \quad \middle| \quad -L/2 \le x_3 \le L/2 \quad ; \quad 0 \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le R \right\} \quad .$$

86. **Zentraler Stoß: Relativistische Betrachtung**
Betrachten Sie den zentralen, eindimensionalen Stoß eines Elektrons der kinetischen Energie $E_{e,\text{vor}}$ mit einem Proton. Welche Energie $E_{e,\text{vor}}$ muß das Elektron vor dem Stoß haben, damit das Proton nach dem Stoß die Energie $E_{p,\text{nach}} = 2m_pc^2$ hat (m_p bezeichnet die Ruhemasse des Protons). Betrachten Sie den Stoß in dem Inertialsystem, in dem das Proton vor dem Stoß ruht.
Hinweis: Zur Vereinfachung Ihres Ergebnisses können Sie ausnutzen, daß die Ruhemasse m_e des Elektrons viel kleiner als die des Protons ist, d.h. $m_e \ll m_p$. Dies ist jedoch nicht zwingend erforderlich.

Termine

- Vor der Klausur bieten wir zwei zusätzliche Fragestunden an: **Montag, d. 31.07.06 und Mittwoch, d. 02.08.06, jeweils um 13:00 Uhr in MS 3.2**. An diesen Terminen werden ausschließlich Fragen der Klausurteilnehmer beantwortet. Es werden *keine* neuen klausurrelevanten Themen besprochen. Die Teilnahme ist daher nicht zwingend erforderlich.
- Die zweite Klausur findet am **Donnerstag, d. 03.08.06, von 9:00 Uhr bis 12:00 Uhr im Hörsaal MS 3.1** statt. Hilfsmittel jeglicher Art (Taschenrechner, Formelsammlungen, Vorlesungsmitschrift etc.) sind *nicht* zugelassen, Papier wird gestellt.
- Bitte bringen Sie zur Klausur einen gültigen Lichtbildausweis sowie Ihren Studentenausweis mit.