INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

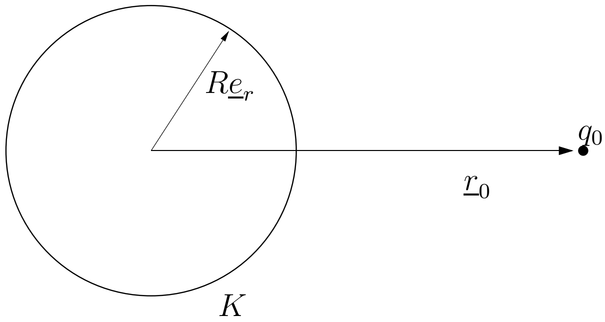
Klassische Feldtheorie — SoSe 2006

23. Übungsblatt — Abgabe: Mittwoch, 19.07.06 (bis 11.25 Uhr) im Kasten bei A316/A317

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

73. **Methode der Bildladung II** **(12 Punkte)**

Gegeben sei eine geerdete, metallische Kugel K mit Radius R. Bringt man eine Punktladung q_0 an den Ort $\underline{r}_0$ (siehe Skizze) in die Nähe der Kugel, so entsteht auf der Kugeloberfläche eine Influenzladung.



(a) Bestimmen Sie das Potential $\Phi(\underline{r})$ im Außenraum der Kugel mit Hilfe der Methode der Bildladung unter der Randbedingung $\Phi(\underline{r})|_{\underline{r}\in\partial K} = 0$

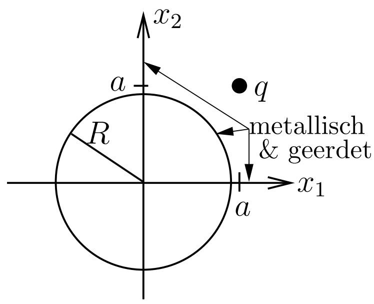
(b) Wie groß ist das elektrische Feld im Innenraum der Kugel? Begründen Sie, unter welchem Winkel das elektrische Feld auf der Oberfläche der Kugel einmündet. Verwenden Sie das Gaußsche Gesetz, um eine Bestimmungsgleichung für die Influenzladung $\sigma_0(\underline{r})$ aufzustellen. Geben Sie $\sigma_0(\underline{r})$ an. Welches sind die Linien konstanter Ladungsdichte auf der Kugeloberfläche? Skizzieren Sie $\sigma_0(\underline{r})$ in geeigneter Weise.

(c) Bestimmen Sie die influenzierte Gesamtladung durch Integration über die Kugeloberfläche und vergleichen Sie mit der Stärke der Bildladung.

(d) Berechnen Sie die von der influenzierten Ladung auf die Punktladung q_0 ausgeübte Kraft als Funktion von $r_0 = |\underline{r}_0|$. Was ergibt sich für $r_0 \gg R$?

(e) Wir betrachten nun eine etwas kompliziertere Geometrie:

Bestimmen Sie das Potential Φ im Bereich $\{\underline{r}\,|\,x_1, x_2 > 0; \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} > R\}$ für die in der Skizze dargestellte Geometrie. Eine Punktladung q befindet sich bei $(a, a, 0)$. Die Metallplatten bei $x_1 = 0, x_2 = 0$ sowie die Kugel um den Ursprung mit Radius R seien geerdet. Zeigen Sie insbesondere auch, daß $\Phi = 0$ für $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ und auf der Oberfläche der Kugel erfüllt ist.



74. **Gesetz von Ampère** **(7 Punkte)**

In zwei einfachen Fällen soll das Magnetfeld mit Hilfe der integralen Form des Gesetzes von Ampère bestimmt werden:

$$\oint_{\partial A} \underline{B} \cdot \mathrm{d}\underline{r} = \mu_0 \int_A \underline{j} \cdot \mathrm{d}\underline{F} \quad .$$

(a) *Koaxiale, dicht gewickelte Spulen*
Gegeben seien zwei unendlich lange, koaxiale und dicht gewickelte Spulen mit N_1 bzw N_2 Windungen pro Länge L und den Radien $R_1 < R_2$. Die Spulen werden von den konstanten Strömen I_1 bzw. I_2 durchflossen. Die Spulenachse sei die x_3-Achse. Bestimmen Sie das Magnetfeld dieser Anordnung sowie die Gesamtenergie der Anordnung im Volumen $\{\underline{r}\,|\,0 < x_3 < L, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq R_2\}$.

Rückseite beachten! $\longrightarrow$

(b) *Koaxialkabel*
Gegeben sei ein unendlich langer, gerader Draht mit dem Radius R_1, der vom konstanten Strom I durchflossen wird. Der Strom sei gleichmäßig über den Querschnitt des Drahtes verteilt.
Der Draht verläuft entlang der Achse eines Hohlzylinders mit Innenradius R_2 und Außenradius R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$). Der Hohlzylinder wird (im Bereich $R_2 < r < R_3$, r in Zylinderkoordinaten) homogen von einem betragsmäßig gleichen Strom I durchflossen. Die Ströme in Draht und Hohlzylinder sollen jedoch in entgegengesetzte Richtungen fließen.
Berechnen Sie das Magnetfeld dieser Anordnung im gesamten Raum und skizzieren Sie $|\underline{B}|$ als Funktion des Abstandes von der Zylinderachse.

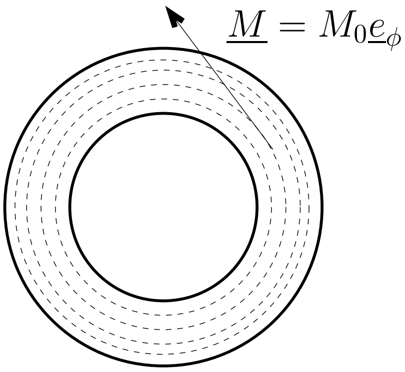
75. **Magnetisches Moment einer Leiterschleife** **(8 Punkte)**
In dieser Aufgabe soll das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Leiterschleife untersucht werden.

(a) Berechnen Sie das magnetische Moment $\underline{m}$ eines infinitesimal dünnen Leiterdrahtes, der als Quadrat geformt ist und in dem der konstante Strom I fließt. Der Koordinatenursprung sei im Mittelpunkt des Quadrates. Welchen Beitrag liefert das magnetische Moment $\underline{m}$ im allgemeinen und in diesem Beispiel zur magnetischen Induktion $\underline{B}$?

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes das Magnetfeld, das von einem konstanten Strom I erzeugt wird, der in einem infinitesimal dünnen Draht fließt, wobei der Draht als Quadrat geformt ist. Vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe (a), indem Sie $\underline{B}$ im Fernfeld auf der x_3-Achse betrachten, wobei $\underline{e}_3$ senkrecht auf der Quadratfläche steht und die x_3-Achse durch den Mittelpunkt des Quadrates verläuft.

76. **Magnetisierter Ring** **(3 Punkte)**

Ein Ring sei mit der konstanten Magnetisierung $\underline{M} = M_0\underline{e}_\phi$ magnetisiert worden (siehe Skizze). Bestimmen Sie das Magnetfeld $\underline{H}$ und die magnetische Induktion $\underline{B}$ im ganzen Raum unter der Randbedingung, daß die Felder im Unendlichen verschwinden mögen.



77. **Methode der Bildladung III** **(Bearbeitung freiwillig; + 10 Zusatzpunkte)**
Zwischen zwei in x_2- und x_3-Richtung unendlich ausgedehnten, geerdeten Metallplatten bei $x_1 = d$ und $x_1 = -d$ befindet sich eine Punktladung q am Ort $\underline{r}_0 = (0,0,0)$. Bestimmen Sie mit der Methode der Bildladung das Potential $\Phi(\underline{r})$ im Volumen $V = \{\underline{r}\,|-d \leq x_1 \leq d\}$.

78. **Biot-Savart-Gesetz: Magnetfeld einer Spule** **(Bearbeitung freiwillig; + 10 Zusatzpunkte)**
Berechnen Sie mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes das Magnetfeld einer unendlich langen Spule auf ihrer Mittelachse. Die Spule habe den Durchmesser $2R$ und die Windungszahl n. Die z-Achse soll mit der Mittelachse der Spule übereinstimmen. *Die Spule ist jedoch nicht dicht gewickelt!*

Gehen Sie wie folgt vor:

- Parametrisieren Sie die Spulenwindungen mit z.
- Nutzen Sie die Symmetrie aus und verwenden Sie Zylinderkoordinaten für die Integration.
- Auftretende Integrale, die nicht elementar lösbar sind, sollte man so behandeln: Versuchen Sie, die Integrationsvariable dimensionslos und unabhängig von r, ϕ, z zu machen. Das verbleibende Integral ist dann nur eine Zahl, die Sie nicht mehr bestimmen müssen.