INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

KLASSISCHE FELDTHEORIE — SoSe 2006

21. Übungsblatt — Abgabe: Mittwoch, 12.07.06 (bis 11.25 Uhr) im Kasten bei A316/A317

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

65. **Lorentz-Tensoren** **(10 Punkte)**
In dieser Aufgabe soll das Transformationsverhalten der elektromagnetischen Felder unter der speziellen Lorentz-Transformation diskutiert werden.

(a) Es soll gezeigt werden, daß die Größe $\underline{E}^2 - c^2\underline{B}^2$ ein Lorentz-Skalar ist. Führen Sie den Nachweis auf zwei verschiedenen Wegen:

i. durch direkte Verwendung der in der Vorlesung angegebenen Transformationsgleichungen für die Felder,

ii. durch Verwendung des Tensorkalküls. Betrachten Sie dazu die Größe $\mathcal{B}_{ij}\mathcal{B}^{ji}$, wobei $\mathcal{B}_{ij}$ den Feldstärketensor bezeichnet.

(b) Ist es möglich, eine Lorentz-Transformation anzugeben, die ein reines elektrisches Feld ($B = 0$) auf ein reines magnetisches Feld ($E' = 0$) transformiert? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Zeigen Sie analog zu Teilaufgabe (a) auf zwei Wegen, daß $\underline{E} \cdot \underline{B}$ ein Lorentz-Skalar ist.
Hinweis: Für die Rechnung im Tensorkalkül ist es hilfreich, zunächst die Determinante des Feldstärketensors zu bestimmen.

(d) Untersuchen Sie durch Verwendung der Transformationsgleichungen für die Felder, wie sich die Größen

$$\underline{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\underline{E} \times \underline{B} \qquad \text{(Poynting-Vektor im Vakuum)}$$

und

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\underline{B}^2\right) \qquad \text{(Energiedichte im Vakuum)}$$

unter der speziellen Lorentz-Transformation auf das gestrichene System transformieren.

66. **Relativistische Betrachtung des Teilchenzerfalls** **(7 Punkte)**
Ein Σ^0-Teilchen bewegt sich auf einen Detektor zu, und zwar mit der Geschwindigkeit $c/3$ aus der Sicht des Ruhesystems des Detektors. Das Teilchen zerfällt in ein Λ-Teilchen und ein Photon, bevor es den Detektor erreicht. Das Photon bewege sich nach dem Zerfall auf den Detektor zu. Die Situation wird eindimensional betrachtet.

(a) Informieren Sie sich anhand geeigneter Literatur, was ein Σ^0- bzw. ein Λ-Teilchen ist und geben Sie Größen wie Masse und Lebensdauer an.

(b) Welche Energie hat das Σ^0-Teilchen im Ruhesystem des Detektors?

(c) Welche Energie hat das Photon im Ruhesystem des Σ^0-Teilchens?

(d) Welche Energie (des Photons) wird im Detektor gemessen?

Geben Sie Ihre Ergebnisse in Abhängigkeit von den Ruhemassen der Teilchen an.

67. **Kondensatoren und Kapazität I: Zylinderkondensator** **(4 Punkte)**
Zwei metallische Zylindermäntel der Länge L mit den Radien R_1 und R_2 sind so ineinander geschoben, daß die Querschnitte senkrecht zur Zylinderachse konzentrische Kreise sind. Der innere Mantel trage die konstante Flächenladungsdichte σ_1; der äußere Mantel sei mit σ_2 aufgeladen. Vernachlässigen Sie Randeffekte, d.h. benutzen Sie $R_1, R_2 \ll L$.

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\underline{E}$ in den Raumbereichen I ($r < R_1$, r in Zylinderkoordinaten), II ($R_1 < r < R_2$) und III ($R_2 < r$). Ist $\underline{E}$ stetig bei $r = R_1$ bzw. $r = R_2$? Begründen Sie Ihre Beobachtung!

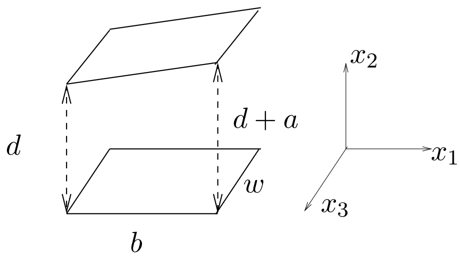
Rückseite beachten! ⟶

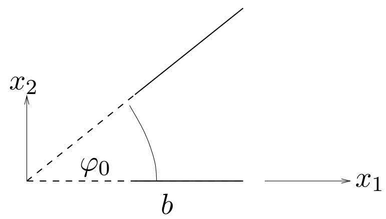
(b) Geben Sie das Potential Φ in den Bereichen I, II und III an. Welchen Wert hat Φ für $r = \infty, R_2, R_1$? Ist Φ stetig?

(c) Wie müssen σ_1 und σ_2 gewählt werden, damit das elektrische Feld im Außenraum III verschwindet? Geben Sie für diesen Fall die Kapazität $C = Q/\delta\Phi$ an. Mit $\delta\Phi$ wird die Potentialdifferenz zwischen den Zylindern bezeichnet.

68. **Kondensatoren und Kapazität II** **(9 Punkte)**
Es sollen $\underline{E}$, $\underline{D}$ und die Kapazität zweier interessanter Kondensatoren berechnet werden.

(a) *Plattenkondensator*
Wir betrachten den *nicht-ganz-so-parallelen* Plattenkondensator (siehe Skizze). Zwischen den Platten liege die Spannung $\delta\Phi$ an. Berechnen Sie die Kapazität und vernachlässigen Sie dabei Randeffekte. Gehen Sie wie folgt vor:





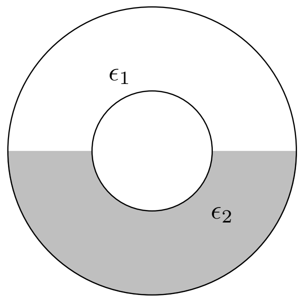
i. Führen Sie Zylinderkoordinaten (r, φ, z) ein, wobei die z-Achse in der Schnittgeraden der beiden Plattenebenen liege. Begründen Sie, daß das Potential nur von φ abhängt.

ii. Lösen Sie die Laplace-Gleichung im Volumen zwischen den Platten. Verwenden Sie als Randbedingung $\Phi(x_1, x_2 = 0, x_3) = 0$ und geben Sie das elektrische Feld $\underline{E}$ an.

iii. Berechnen Sie die Ladung Q auf der Kondensatorplatte bei $x_2 = 0$.

(b) *Halb gefüllter Kugelkondensator*

Ein Kugelkondensator mit Innenradius R_i und Außenradius R_a sei zur Hälfte mit Luft ($\epsilon_1 \approx 1$) und zur Hälfte mit einem Dielektrikum mit $\epsilon_2 \neq 1$ gefüllt (siehe Skizze). Ermitteln Sie die dielektrische Verschiebung $\underline{D}$ und das elektrische Feld $\underline{E}$ im Inneren des Kondensators. Die Kondensatorplatten tragen die Ladungen Q bzw. $-Q$. Geben Sie die Kapazität an.



Hinweis: Nehmen Sie an, daß die Felder innerhalb des Kondensators radial verlaufen. Überlegen Sie sich, welche Ladungen auf den beiden Kondensatorhälften gespeichert sind. Beachten Sie, daß die Ladungen auf der inneren bzw. äußeren Platte nicht homogen verteilt sind!.

69. **Punktladung im konstanten elektrischen Feld** **(Bearbeitung freiwillig; + 10 Zusatzpunkte)**
Die relativistischen Bewegungsgleichungen eines Teilchens der Ruhemasse m_0 und der Ladung q, das sich in einem konstanten elektrischen Feld $\underline{E} = E_0 \underline{e}_1$ in der (x_1, x_2)-Ebene bewegt, sind:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{m_0 \dot{x}_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = qE_0 \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{m_0 \dot{x}_2}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0 \quad \text{mit} \quad \beta^2 = \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{c^2} \quad .$$

Integrieren Sie die Bewegungsgleichungen und geben Sie $(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$ sowie die Bahnkurve $(x_1(t), x_2(t))$ an. Vergleichen Sie mit dem nicht-relativistischen Fall. Die Anfangsbedingungen seien

$$\dot{x}_1(0) = 0 \quad ; \quad \dot{x}_2(0) = v_0 \quad ; \quad x_1(0) = 0 \quad ; \quad x_2(0) = 0 \quad .$$