INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

KLASSISCHE FELDTHEORIE — SOSE 2006

19. Übungsblatt — Abgabe: Mittwoch, 05.07.06 (bis 11.25 Uhr) im Kasten bei A316/A317

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

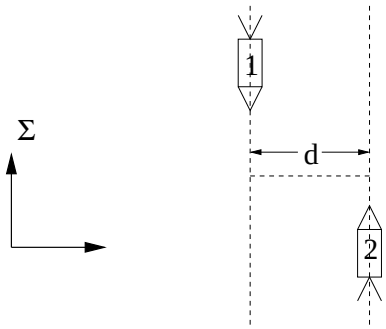
58. **Relativistische Lösegeldübergabe** **(4 Punkte)**
In dieser Aufgabe diskutieren wir die Transformation von Geschwindigkeiten zwischen verschiedenen Inertialsystemen.

(a) Zwei Inertialsysteme Σ und Σ' bewegen sich relativ zueinander mit der Geschwindigkeit $\underline{v} = v_0\,\underline{e}_1$. Ein Teilchen bewege sich gleichförmig im System Σ, d.h. es ist $\underline{x} = \underline{u}t$. Geben Sie die Transformationsgleichungen für die Geschwindigkeit $\underline{u}$ an.
Hinweis: Drücken Sie $\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}x_i$ durch $\mathrm{d}t'$ und $\mathrm{d}x'_i$ aus und bestimmen Sie $\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t$.

(b) Aus der Sicht eines Beobachters im Inertialsystem Σ bewegen sich zwei Raumschiffe auf parallelen Bahnen im Abstand d mit den Geschwindigkeiten $\underline{v}_1 = -c/2\,\underline{e}_2$ bzw. $\underline{v}_2 = c/2\,\underline{e}_2$.

i. In dem Zeitpunkt, in dem die Raumschiffe vom System Σ aus gesehen den kürzesten Abstand d haben, schickt das Schiff 1 ein Paket mit der Geschwindigkeit $3c/4$ ab (wiederum bezogen auf das Inertialsystem Σ). In welchem Winkel muß aus der Sicht eines Beobachters an Bord von Schiff 1 das Paket abgeschickt werden, damit es das zweite Schiff erreichen kann? Nehmen Sie an, daß die Koordinatenachsen des Beobachters auf Schiff 1 parallel zu denen des Systems Σ sind.

ii. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das Paket vom Schiff 1 aus gesehen?



59. **Das Zwillingsparadoxon: Ein Abenteuer mit Alice und Bob** **(10 Punkte)**
Am Neujahrstag 2200 startet die Weltraumfahrerin Alice von der Erde und fliegt mit 80% der Lichtgeschwindigkeit nach Alpha Zentauri (etwa vier Lichtjahre von der Erde entfernt). Wenn sie den Stern erreicht, dreht sie schnell eine Runde (das dafür benötigte Zeitintervall sei vernachlässigbar) und fliegt zurück. Sie kommt am Neujahrstag 2210 wieder nach Hause. Ihr Bruder Bob bleibt auf der Erde. Die beiden machen aus, sich an jedem Neujahrstag (nach ihrer eigenen Uhr) per Funk eine Grußbotschaft zu schicken. *Hinweis:* Bei den Teilaufgaben (a)-(c) wird ein rechnerischer Nachweis verlangt.

(a) Zeigen Sie, daß Alice, einschließlich des letzten Reisetages, sechs Botschaften schicken wird, während Bob zehn Botschaften schicken wird, und demzufolge Alice weniger gealtert ist.

(b) Zeigen Sie, daß Alice bis zum Zeitpunkt ihrer Umkehr nur einen Neujahrsgruß erhält, die anderen neun erst auf dem Rückweg.

(c) Zeigen Sie, daß Bob in den ersten neun Jahren nur alle drei Jahre eine Botschaft von Alice erhält, im letzten Jahr jedoch drei Botschaften.

(d) Zeichnen Sie auf Kästchenpapier das entsprechende Minkowski-Diagramm inklusive der Weltlinien von Alice, Bob und allen ausgesendeten Botschaften.

(e) Jemand behauptet:
Die dargestellte Situation ist symmetrisch, d.h. man kann auch Alice als ruhend und Bob als bewegt ansehen. Als Konsequenz müßte dann nach Ende der Reise Bob jünger als Alice sein.
Wo steckt der Fehler?

Rückseite beachten! ⟶

60. **Doppler-Effekt und Aberration** **(10 Punkte)**

Betrachten Sie eine ebene elektromagnetische Welle der Form $\Phi(\underline{r}, t) = \sin(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)$ mit $\omega = ck$.

(a) Analysieren Sie die ebene Welle $\Phi(\underline{r}', t') = \sin\left(\underline{k}' \cdot \underline{r}' - \omega' t'\right)$, die ein Beobachter sieht, der sich mit konstanter Geschwindigkeit $\underline{v} = (v, 0, 0)$ in x_1-Richtung bewegt. Bestimmen Sie $\underline{k}'(\underline{k})$ und $\omega'(\omega)$.
Hinweis: Machen Sie sich zunächst anschaulich klar, daß die Phase $\xi = \underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t$ invariant unter Lorentz-Transformationen ist.

(b) Aus welcher Richtung scheint die Welle zu kommen, wenn $\underline{k} = (0, 0, k)$ senkrecht zur Bewegungsrichtung liegt (*Aberration*)?

(c) Die Änderung der Frequenz $\omega \to \omega'$ aufgrund der Relativbewegung beider Inertialsysteme bezeichnet man als *relativistischen Doppler-Effekt*. Wir betrachten ein konkretes Beispiel:
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, bei der infolge des relativistischen Doppler-Effekts eine in Fahrtrichtung liegende rote Ampel grün erscheint.

(d) Beschreiben Sie, was für einen Sternenhimmel Captain Picard sieht, wenn er bei $v = 0.999c$ aus dem Fenster schaut.

61. **Nicht-orthogonale Koordinaten** **(6 Punkte)**

Im $\mathbb{R}^2$ bezeichnen wir mit x^1, x^2 die Koordinaten bezüglich der kartesischen Einheitsbasis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ und führen über

$$\xi^1 = \gamma x^1 - \beta\gamma x^2 \quad ; \quad \xi^2 = -\beta\gamma x^1 + \gamma x^2$$

neue Koordinaten ξ^1, ξ^2 ein. Es gilt $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Mit β wird eine positive Konstante bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie die kovariante Basis $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ und die kontravariante Basis $\left\{\underline{b}^1, \underline{b}^2\right\}$ der neuen Koordinaten. Geben Sie Bestimmungsgleichungen für die Koordinatenlinien $\xi^a = \text{const}$ an. Skizzieren Sie für $\beta = 0.8$ die Koordinatenlinien und die ko- bzw. kontravarianten Basisvektoren.

(b) Bestimmen Sie die ko- und kontravarianten Komponenten des Metriktensors (g_{ab} bzw. g^{ab}). Überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand der Beziehung $\underline{b}^a = g^{ab}\underline{b}_b$.

(c) Bezüglich der kartesischen Basis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ seien die Vektorfelder

$$\underline{A} = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 \quad \text{und} \quad \underline{B} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$$

gegeben.

i. Berechnen Sie zunächst für einen beliebigen Punkt P die ko- und die kontravarianten Komponenten beider Felder.

ii. Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\underline{A} \cdot \underline{B}$ sowohl in kartesischen Koordinaten als auch in den Koordinaten ξ^1, ξ^2.