INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

KLASSISCHE FELDTHEORIE SoSe 2006

17. Übungsblatt Abgabe: Mittwoch, 28.06.06 (bis 11.25 Uhr) im Kasten bei A316/A317

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

53. **Multipolentwicklung der retardierten Potentiale: Dipolstrahlung** **(25 Punkte)**
In der Vorlesung (Kapitel II, Abschnitt 10) wurde die Reihenentwicklung des retardierten Vektorpotentials

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\underline{j}(\underline{r}\,',t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}\,'|}{c})}{|\underline{r}-\underline{r}\,'|}$$

für große Entfernungen r von einer inselartigen Quellverteilung $\rho(\underline{r}',t), \underline{j}(\underline{r}',t)$ diskutiert. Im folgenden betrachten wir lediglich den ersten Summanden dieser Entwicklung, wobei wir uns auf das Vakuum ($\mu = \epsilon = 1$) beschränken:

$$\underline{A}_1(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} \quad \text{mit} \quad \underline{p}(t) = \int \mathrm{d}^3r'\underline{r}'\rho(\underline{r}',t) \quad . \tag{1}$$

Dieser Term soll nun für den Spezialfall einer zeitlich oszillierenden Ladungs- und Stromverteilung

$$\rho(\underline{r},t) = \rho(\underline{r})\exp(-i\omega t) \quad \text{bzw.} \quad \underline{j}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r})\exp(-i\omega t)$$

explizit ausgewertet und diskutiert werden. Dies führt zur sog. *Dipolstrahlung*.

(a) Zeigen Sie, daß die Auswertung von Gl. (1) auf die Form

$$\underline{A}_1(\underline{r},t) = \underline{A}_1(\underline{r})\exp(-i\omega t) \quad \text{mit} \quad \underline{A}_1(\underline{r}) = -i\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\underline{\mathcal{P}}\,\frac{\exp(ikr)}{r} \tag{2}$$

mit dem zeitunabhängigen Dipolmoment

$$\underline{\mathcal{P}} = \int \mathrm{d}^3r'\,\underline{r}'\,\rho(\underline{r}')$$

führt. Die Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ ist wiederum durch $\omega = ck$ festgelegt.

(b) Bestimmen Sie mittels Gl. (2) das magnetische Feld

$$\underline{B}_1(\underline{r},t) = \underline{B}_1(\underline{r})\exp(-i\omega t) = [\nabla\times\underline{A}_1(\underline{r})]\exp(-i\omega t) \quad .$$

Ermitteln Sie damit aus dem Gesetz von Ampère das elektrische Feld $\underline{E}_1(\underline{r},t) = \underline{E}_1(\underline{r})\exp(-i\omega t)$. Für große Entfernungen von der Quellverteilung sollte sich näherungsweise

$$\underline{B}_1(\underline{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}ck^2\frac{\exp(ikr)}{r}\underline{e}_r\times\underline{\mathcal{P}} \quad \text{sowie} \quad \underline{E}_1(\underline{r}) \approx c\underline{B}_1(\underline{r})\times\underline{e}_r$$

ergeben. *Diese Näherungsformeln sollen in den folgenden Teilaufgaben stets verwendet werden.* Diskutieren Sie den Feldverlauf von $\underline{E}_1$ und $\underline{B}_1$. Gehen Sie insbesondere auf die Abnahme der Feldstärke für große r ein.

(c) Bestimmen Sie den zeitlichen Mittelwert des zu $\underline{E}_1$ und $\underline{B}_1$ gehörenden Poynting-Vektors $\underline{\Pi}_1$. Machen Sie sich dafür zunächst klar, daß dieser Mittelwert in der Form

$$<\underline{\Pi}_1> = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\{\underline{E}_1^\star(\underline{r})\times\underline{B}_1(\underline{r})\} = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\{\underline{E}_1(\underline{r})\times\underline{B}_1^\star(\underline{r})\}$$

geschrieben werden kann. Der Stern bezeichnet die komplexe Konjugation. Diskutieren Sie die Abhängigkeit des Betrages $|<\underline{\Pi}_1>|$ vom Winkel zwischen $\underline{e}_r$ und $\underline{\mathcal{P}}$ (Skizze!).

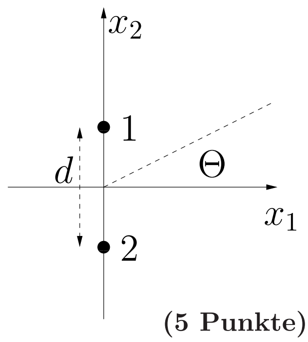
Rückseite beachten! ⟶

(d) *Gekreuzte elektrische Dipole*
Wir betrachten nun *zwei* Ladungsverteilungen, die mit gleicher Frequenz und in Phase oszillieren. Ihre Dipolmomente $\underline{\mathcal{P}}_1$ und $\underline{\mathcal{P}}_2$ sollen jedoch senkrecht zueinander in der (x_2, x_3)-Ebene angeordnet sein: $\underline{\mathcal{P}}_1 = \mathcal{P}_0 \underline{e}_3$ und $\underline{\mathcal{P}}_2 = \mathcal{P}_0 \underline{e}_2$. Beide Dipolmomente haben den gleichen Betrag $\mathcal{P}_0$.
Bestimmen Sie die mittlere Strahlungsleistung $< \underline{\Pi} >$ für eine solche Anordnung. Geben Sie das Ergebnis in Kugelkoordinaten an. Diskutieren Sie anhand geeigneter Skizzen die Winkelabhängigkeit der mittleren Strahlungsleistung in der (x_1, x_2)-Ebene und in der (x_2, x_3)-Ebene. Bei der Rechnung können Sie (nahezu) analog zur Bestimmung der Strahlungsleistung eines einzelnen Dipols vorgehen. Beachten Sie, daß $\underline{\mathcal{P}}_1 = \underline{\mathcal{P}}_1{}^*$, $\underline{\mathcal{P}}_2 = \underline{\mathcal{P}}_2{}^*$ gilt.

(e) *Parallele elektrische Dipole*
Zwei parallel zueinander ausgerichtete elektrische Dipole mit Abstand $d = \lambda/2$ oszillieren mit gleicher Frequenz ω und Amplitude $\underline{\mathcal{P}}$ (siehe Skizze). Die Dipole befinden sich in den Punkten $(0, \pm\lambda/4, 0)$ und stehen senkrecht auf der (x_1, x_2)-Ebene. Diskutieren Sie die Ausstrahlung des Systems in der Fernzone.

i. Berechnen Sie die in der Äquatorialebene ($x_3 = 0$) abgestrahlte Intensität $I = I(\Theta)$ und skizzieren Sie die Intensitätsverteilung $I(\Theta)$ als Polardiagramm für den Fall, daß die Dipole in Phase schwingen.
Hinweis: Die Intensität ist wiederum durch $|< \underline{\Pi} >|$ gegeben.

ii. Welche Phasenverschiebung muß Dipol 2 gegenüber Dipol 1 aufweisen, damit ein Beobachter in der Richtung $\Theta = \pi/6$ maximale Intensität mißt? Für welchen Winkel Θ gibt es dann keine Ausstrahlung? Skizzieren Sie wiederum $I(\Theta)$.



54. **Michelson-Morley-Experiment** **(5 Punkte)**
Ursprünglich nahm man an, daß sich das Licht (analog zur Schallausbreitung) in einem besonderen Medium, dem *Äther*, ausbreitet. Die Lichtgeschwindigkeit c, die ein relativ zum Äther bewegter Beobachter mißt, müßte dann von seiner Bewegungsrichtung abhängen.
Im Michelson-Morley-Experiment (siehe Skizze) wird ausgenutzt, daß die Bahngeschwindigkeit v_E der Erde annähernd konstant ist. Wir nehmen im folgenden an, daß sich die Erde mit v_E relativ zum Äther bewegt.

(a) Welchen Gangunterschied s haben zwei Lichtstrahlen, von denen einer den Weg OS_1O und der andere die Strecke OS_2O zurückgelegt hat? Verwenden Sie die Galilei-Transformation. Entwickeln Sie Ihr Ergebnis für s bis zur Ordnung $(v_E/c)^2$.

(b) Wenn man das Interferometer um 90° dreht, ändert sich der Gangunterschied und das Interferenzmuster bei O verschiebt sich um Δn Interferenzstreifen. Berechnen Sie Δn. Verwenden Sie als Zahlenbeispiel: $v_E/c = 10^{-4}, l_1 = l_2 = 25\text{m}, \lambda = 5 \cdot 10^{-5}\text{cm}$. Vergleichen Sie mit dem experimentellen Wert von $\Delta n \approx 10^{-3}$.