INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

KLASSISCHE FELDTHEORIE SoSe 2006

16. Übungsblatt Abgabe: keine, Besprechung in den Übungen am 21.06.06

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

52. **Multipolentwicklung für stationäre Magnetfelder**
Ein stationäres Magnetfeld wird durch die Gleichungen

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$$

beschrieben.

(a) Leiten Sie aus diesen Beziehungen die Poisson-Gleichung für das Vektorpotential $\underline{A}$ ab:

$$\triangle \underline{A} = -\mu_0 \underline{j} \quad .$$

Das Vektorpotential $\underline{A}$ kann somit in der Form

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \tag{1}$$

dargestellt werden.

(b) Bestimmen Sie aus Gl. (1) die magnetische Induktion $\underline{B}$. Zeigen Sie insbesondere, daß sich für einen linienförmigen Leiter, der vom Strom $I(\underline{r})$ durchflossen wird, die Beziehung

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I(\underline{r}') \, \frac{\mathrm{d}\underline{r}' \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \qquad \text{(Gesetz von Biot-Savart)}$$

ergibt.

Wir betrachten nun eine auf einen endlichen Raumbereich begrenzte Stromverteilung $\underline{j}(\underline{r}')$, die am Beobachtungspunkt P eine magnetische Induktion $\underline{B}(\underline{r})$ erzeugt. Der Abstand des Punktes P von dem Gebiet mit $\underline{j} \neq 0$ sei sehr groß, verglichen mit den Abmessungen des Gebietes. Ziel ist nun die Bestimmung eines Näherungsausdruckes für das Vektorpotential im Punkt P.

(c) Entwickeln Sie zunächst den Term $\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$ im Integranden von Gl. (1) bis zur ersten Ordnung um $\underline{r}' = 0$. Sie erhalten damit eine approximative Darstellung des Vektorpotentials in der Form

$$\underline{A}(\underline{r}) = \underline{A}_0(\underline{r}) + \underline{A}_1(\underline{r}) + \ldots \quad . \tag{2}$$

(d) Für die weiteren Überlegungen benötigen wir folgenden Hilfssatz: Es seien $f(\underline{r})$, $g(\underline{r})$ stetig differenzierbare, aber ansonsten beliebige skalare Felder. Zeigen Sie: Für den hier betrachteten Fall inselartiger Quellen und zeitlich konstanter Felder gilt dann

$$\int \mathrm{d}^3 r \, \left[f(\underline{r}) \, \underline{j}(\underline{r}) \cdot \nabla g(\underline{r}) + g(\underline{r}) \, \underline{j}(\underline{r}) \cdot \nabla f(\underline{r}) \right] = 0 \quad .$$

(e) Zeigen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe (d), daß der erste Summand $\underline{A}_0$ in Gl. (2) verschwindet. Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

(f) Zeigen Sie, daß der zweite Summand $\underline{A}_1$ in der Form

$$\underline{A}_1(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\underline{m} \times \underline{r}}{r^3}$$

dargestellt werden kann, wobei das *magnetische Moment* $\underline{m}$ durch

$$\underline{m} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r' \, \left[\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}') \right]$$

gegeben ist.

(g) Bestimmen Sie das vom magnetischen Moment erzeugte Magnetfeld $\underline{B}_1 = \operatorname{rot} \underline{A}_1$.