INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

KLASSISCHE FELDTHEORIE — SOSE 2006

15. Übungsblatt — Abgabe: Mittwoch, 21.06.06 (bis 11.25 Uhr) im Kasten bei A316/A317

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

47. **Multipolentwicklung des Poisson-Integrals III: Legendre-Polynome** **(10 Punkte)**
Wir betrachten erneut die durch

$$\Phi\left(\underline{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3r' \, \frac{\rho\left(\underline{r}'\right)}{\left|\underline{r} - \underline{r}'\right|} \tag{1}$$

gegebene Lösung der Poisson-Gleichung. In Aufgabe 45 wurde diskutiert, daß der Integrand für große Entfernungen von der Ladungsverteilung $\rho\left(\underline{r}'\right)$ in eine Taylor-Reihe entwickelt werden kann (Multipolentwicklung). In dieser Aufgabe soll eine alternative Reihenentwicklung unter Benutzung der Legendre-Polynome behandelt werden.

(a) Wir betrachten zunächst den Nenner des Integranden in Gl. (1):

$$\frac{1}{\left|\underline{r} - \underline{r}'\right|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}} = \frac{1}{r\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\theta}} \quad \text{mit} \quad \theta = \angle\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) \quad .$$

Zeigen Sie: Für $r'/r < 1$ gilt

$$\frac{1}{\left|\underline{r} - \underline{r}'\right|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n\left(\cos\theta\right) \tag{2}$$

mit den Legendre-Polynomen

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(x^2 - 1\right)^n \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad .$$

Benutzen Sie (ohne Beweis!) $P_n(1) = 1$.

(b) Wir setzen die Reihenentwicklung (2) in das Poisson-Integral (1) ein:

$$\Phi\left(\underline{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3r' \, \frac{\rho\left(\underline{r}'\right)}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n\left(\cos\theta\right) \quad . \tag{3}$$

Werten Sie die ersten drei Terme dieser Entwicklung aus ($n = 0, 1, 2$). Reproduzieren Sie damit die aus Aufgabe 45 bekannten Ausdrücke für Monopol-, Dipol- und Quadrupolpotential.

(c) Mittels Gl. (3) soll noch ein weiterer Summand der Reihenentwicklung bestimmt werden: Drücken Sie den dem Quadrupol folgenden Term der Multipolentwicklung des Potentials ($n = 3$) mit einem geeigneten Tensor dritter Stufe aus.

48. **Multipolentwicklung des Poisson-Integrals IV: Verschiebungssatz für Multipole (4 Punkte)**
Aus den vorhergehenden Aufgaben sind Ihnen das Dipolmoment

$$\underline{p} = \int \mathrm{d}^3r' \, \rho\left(\underline{r}'\right) \underline{r}'$$

sowie das Quadrupolmoment

$$q_{ij} = \int \mathrm{d}^3r' \, \rho\left(\underline{r}'\right) \left\{3x_i'x_j' - \left(\underline{r}'\right)^2 \delta_{ij}\right\}$$

bekannt.

(a) Zeigen Sie: Das Dipolmoment einer Ladungsverteilung $\rho\left(\underline{r}'\right)$ ist genau dann invariant gegenüber Verschiebungen $\underline{R}' = \underline{r}' + \underline{a}$ des Koordinatensystems ($\underline{a} = \text{const}$), wenn die Gesamtladung $Q = \int \mathrm{d}^3r' \, \rho\left(\underline{r}'\right)$ verschwindet.

(b) Finden Sie eine analoge Aussage für das Quadrupolmoment und beweisen Sie diese.

Rückseite beachten! ⟶

49. **Multipolentwicklung des Poisson-Integrals V: Quadrupolmoment** **(4 Punkte)**
Es sollen einige interessante Eigenschaften des Quadrupolmoments diskutiert werden.

(a) Wie viele unabhängige Komponenten hat die 3×3-Matrix q_{ij}?

(b) Zeigen Sie, daß sich das Quadrupolmoment bei unitären Transformationen wie ein Tensor zweiter Stufe verhält.

(c) Betrachten Sie eine Körper mit der Massendichte $\rho_m(\underline{r})$, dessen Trägheitstensor Θ_{ij} bekannt sei. Nehmen Sie an, der Körper sei mit der Ladungsdichte

$$\rho(\underline{r}) = \frac{Q}{M}\rho_m(\underline{r})$$

belegt. Dabei bezeichnen Q und M die (konstante) Gesamtladung bzw. Gesamtmasse des Körpers. Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Komponenten des Quadrupoltensors q_{ij} der Ladungsverteilung $\rho(\underline{r})$.

50. **Multipolentwicklung des Poisson-Integrals VI: Beispiele** **(12 Punkte)**
Berechnen Sie das Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment der folgenden Ladungsverteilungen bezüglich des Koordinatenursprungs:

(a) Vier Punktladungen q auf den Eckpunkten eines Quadrates der Seitenlänge $2a$ mit alternierendem Vorzeichen (siehe Skizze).

(b) Homogen geladene Kugelschale mit Radius R, deren Mittelpunkt im Ursprung liege.

(c) Zylinder mit Radius R und Länge L, der mit der Ladungsdichte

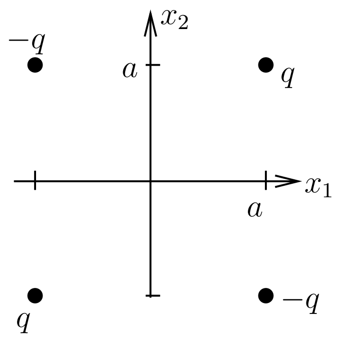
$$\rho(\underline{r}) = \{c\, x_3\, ;\, c = \text{const} \ \text{ für } -L/2 \le x_3 \le L/2 \text{ und } x_1^2 + x_2^2 \le R^2\}$$

belegt ist.

(d) Homogen geladenes Rotationsellipsoid mit den Halbachsen a, a und b, dessen Mittelpunkt im Ursprung liege.

(e) Homogen geladenes Rotationsellipsoid (Halbachsen a, a, b), wobei die Halbachse b des Ellipsoids um den Winkel ϕ_0 gegen die x_3-Achse gekippt sein soll. Der Koordinatenursprung liege im Schwerpunkt des Ellipsoids, das eine konstante Massendichte besitzt.

Geben Sie außerdem die Beiträge der einzelnen Momente zum Potential $\Phi(\underline{r})$ an.



51. **Multipolentwicklung des Poisson-Integrals VII: Wechselwirkungspotential (Bearbeitung freiwillig; + 10 Zusatzpunkte)**
Betrachten Sie zwei Ladungsverteilungen ρ_1, ρ_2, die sich in großem Abstand R voneinander befinden mögen. Entwickeln Sie das Wechselwirkungspotential

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V_1} \mathrm{d}^3 r_1 \int_{V_2} \mathrm{d}^3 r_2 \, \frac{\rho_1(\underline{r}_1)\rho_2(\underline{r}_2)}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}$$

bis zur 3. Ordnung in $1/R$ und drücken Sie Ihr Ergebnis durch die Multipolmomente der beiden Ladungsverteilungen aus. Was ergibt sich hier in führender Ordnung für die Kraft zwischen zwei Ladungsverteilungen, die jeweils eine verschwindende Gesamtladung haben?
Hinweis: Legen Sie den Koordinatensprung in einen beliebigen Punkt im Volumen V_1 der Ladungsverteilung ρ_1. Wählen Sie einen weiteren beliebigen Punkt im Volumen V_2 und bezeichnen Sie dessen Ortsvektor mit $\underline{R}, |\underline{R}| = R$.