INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

Klassische Feldtheorie — SoSe 2006

14. Übungsblatt — Abgabe: keine, Besprechung in den Übungen am 14.06.06

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

45. **Multipolentwicklung des Poisson-Integrals I**
Wir betrachten erneut die durch

$$\Phi\left(\underline{r}\right)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\rho\left(\underline{r}'\right)}{\left|\underline{r}-\underline{r}'\right|} \tag{1}$$

gegebene Lösung der Poisson-Gleichung. Die Ladungsdichte $\rho\left(\underline{r}'\right)$ soll dabei nur in einem endlichen Raumbereich ungleich Null sein. Der Punkt $\underline{r}$ soll außerhalb dieses Raumbereichs in einer größeren Entfernung liegen. Wir wählen das Koordinatensystem so, daß der Koordinatenursprung in dem Bereich liegt, in dem die Ladungen sind.

(a) Entwickeln Sie den Nenner des Integranden in Gl. (1) bis zur zweiten Ordnung um $\underline{r}'=0$. Zeigen Sie damit, daß sich das Potential Φ näherungsweise in der Form

$$4\pi\epsilon_0\Phi=\sum_{i=0}^{2}\tilde{\Phi}_i$$

darstellen läßt, wobei die einzelnen Terme der Entwicklung wie folgt lauten:

$$\tilde{\Phi}_0 = \frac{Q}{r} \quad \text{mit} \quad Q=\int \mathrm{d}^3r'\,\rho\left(\underline{r}'\right) \quad ; \tag{2}$$

$$\tilde{\Phi}_1 = \frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3} \quad \text{mit} \quad \underline{p}=\int \mathrm{d}^3r'\,\rho\left(\underline{r}'\right)\underline{r}' \quad ; \tag{3}$$

$$\tilde{\Phi}_2 = \frac{\underline{r}^T\cdot\underline{\underline{q}}\cdot\underline{r}}{2r^5} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{q}}=\int \mathrm{d}^3r'\,\rho\left(\underline{r}'\right)\left[3\underline{r}'\otimes\underline{r}'-\left(r'\right)^2\underline{\underline{1}}\right] \quad . \tag{4}$$

Der Vektor $\underline{p}$ ist das *Dipolmoment* der Ladungsverteilung. Der Tensor $\underline{\underline{q}}$ wird als *Quadrupolmoment* bezeichnet.

(b) Wir wollen uns nun eine anschauliche Interpretation für das Dipolmoment überlegen. Dazu zerlegen wir die elektrische Ladungsdichte $\rho\left(\underline{r}\right)$ in die Dichten der negativen und der positiven Überschußladungen:

$$\rho\left(\underline{r}\right)=\rho^+\left(\underline{r}\right)+\rho^-\left(\underline{r}\right)$$

mit

$$\rho^+\left(\underline{r}\right)=\frac{1}{2}\left(\rho\left(\underline{r}\right)+\left|\rho\left(\underline{r}\right)\right|\right) \quad \text{und} \quad \rho^-\left(\underline{r}\right)=\frac{1}{2}\left(\rho\left(\underline{r}\right)-\left|\rho\left(\underline{r}\right)\right|\right) \quad .$$

Offensichtlich gilt: $\rho^+\left(\underline{r}\right)$ verschwindet, wenn $\rho\left(\underline{r}\right)$ negativ ist, und $\rho^+\left(\underline{r}\right)$ ist gleich $\rho\left(\underline{r}\right)$, wenn $\rho\left(\underline{r}\right)$ positiv ist. Eine analoge Aussage gilt für $\rho^-\left(\underline{r}\right)$.
Wir definieren nun analog zum Massenschwerpunkt in der Mechanik die Schwerpunkte der positiven und der negativen Überschußladungen:

$$\underline{r}_s^+ \equiv \frac{\int \mathrm{d}^3r'\,\rho^+\left(\underline{r}'\right)\underline{r}'}{\int \mathrm{d}^3r'\,\rho^+\left(\underline{r}'\right)} \equiv \frac{\int \mathrm{d}^3r'\,\rho^+\left(\underline{r}'\right)\underline{r}'}{Q^+} \quad ; \tag{5}$$

$$\underline{r}_s^- \equiv \frac{\int \mathrm{d}^3r'\,\rho^-\left(\underline{r}'\right)\underline{r}'}{\int \mathrm{d}^3r'\,\rho^-\left(\underline{r}'\right)} \equiv \frac{\int \mathrm{d}^3r'\,\rho^-\left(\underline{r}'\right)\underline{r}'}{Q^-} \quad . \tag{6}$$

Zeigen Sie:

$$\underline{p}=Q^+\underline{r}_s^+ + Q^-\underline{r}_s^- \quad .$$

Diskutieren Sie insbesondere den Spezialfall $Q^-=-Q^+$.

Rückseite beachten! ⟶

46. **Multipolentwicklung des Poisson-Integrals II**
Die allgemeine Konstruktion aus der vorhergehenden Aufgabe soll nun auf einige konkrete Beispiele angewendet werden. Bestimmen Sie jeweils das Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment der nachfolgenden Ladungsverteilungen bezüglich des Koordinatenursprungs. Geben Sie außerdem den Beitrag der einzelnen Momente zum skalaren Potential $\Phi(\underline{r})$ an.

(a) Auf den Ecken eines Würfels der Kantenlänge a befinden sich Ladungen $\pm q$. Je zwei benachbarte Ladungen haben unterschiedliches Vorzeichen. Die Ladungen seien symmetrisch um den Koordinatenursprung verteilt.

(b) Ein Quader mit Seitenlängen a, b, c sei homogen geladen. Der Koordinatenursprung liegt im Mittelpunkt des Quaders.

(c) Der Quader aus Teil (b) trage jetzt die Ladungsdichte $\rho(x_3) = -\alpha x_3$ mit einer Konstante α.

(d) Eine Kugel mit Radius R trage die Ladungsdichte $\rho(\underline{r}) = cr^2$ (c =const). Ihr Mittelpunkt liege im Ursprung.