Technische Universität Braunschweig

Prof. U. Motschmann
Institut für Theoretische Physik

Christian Nabert
Institut für Geophysik und extraterrestrische Physik

Übungen zur Vorlesung: "Plasmaphysik"

Blatt 10 **Wintersemester 2014**

Besprechung: 4. Februar 2015

Aufgabe 22: Kelvin-Helmholtz Instabilität

Im Folgenden soll die Kelvin-Helmholtz Instabilität der Hydrodynamik für ein Fluid im Gravitationsfeld untersucht werden.
Wir betrachten eine Situation die homogen in y-Richtung ist. Folglich beschränkt sich die gesamte Betrachtung auf die xz-Ebene. Als Grenzfläche nehmen wir die x-Achse an. Führen Sie die unten aufgeführten Schritte zur Herleitung der Instabilitätsbedingung aus.

- Gehen Sie von den Grundgleichungen der MHD aus un stellen Sie die Differentialgleichungen für ein inkompressibles, nicht viskoses Fluid der (konstanten) Dichte ρ auf. Beziehen Sie dabei die Gravitationskraft in z-Richtung mit ein.
- Betrachten Sie ein Fluid, dass im Grundzustand nur in x-Richtung fließt. Erklären Sie den folgenden Störungsansatz:
$$u(x,z,t) = \tilde{u} + u'(x,z,t) \tag{1}$$
$$w(x,z,t) = w'(x,z,t) \tag{2}$$
$$p(x,z,t) = p_0 - \rho g z + p'(x,z,t) \tag{3}$$
Hierbei ist u die Geschwindigkeit in x-Richtung, w die in $-z$ Richtung und p der Druck.
- Linearisieren Sie die Differentialgleichungen.
- Nun wird ein Ebener-Wellen-Ansatz der Form
$$u' = U(z)e^{i(kx-\omega t)} \tag{4}$$
$$w' = W(z)e^{i(kx-\omega t)} \tag{5}$$
$$p' = P(z)e^{i(kx-\omega t)} \tag{6}$$
gemacht. Erläutern Sie diesen. Gehen Sie dabei auch auf die die Bedeutung von ω ein.
- Was ergibt sich damit für die Differentialgleichungen?

- Zeigen Sie, dass sich für die Störamplitude der z-Komponente $W(z)$ die folgende Gleichung ergibt:

$$\partial_z^2 W(z) = k^2 \cdot W(z) \tag{7}$$

Lösen Sie diese unter der Randbedingung, dass W(z) im unendlichen ($z \to \pm\infty$) verschwindet.

- Betrachten Sie nun die Ebene oberhalb und unterhalb der Grenze getrennt voneinander, bezeichnet mit (1) und (2). Betrachten Sie eine ebene Wellen Auslenkung $a(x,t)$ an der Grenzfläche, d.h.:

$$a(x,t) = A \cdot e^{i(kx - \omega t)} \tag{8}$$

Dieser ändert die Geschwindigkeit gemäß:

$$w' = \frac{d\,a(x,t)}{dt} \tag{9}$$

Nutzen Sie diese Bedingung bei $z = 0$ um die Lösungen für die Störamplitude der z-Komponente $W(z)$ in der oberen und in der unteren Halbebene zu spezifizieren.

- Berechnen Sie ebenso die Bedingungen für den Druck.

- Zeigen Sie damit, dass ein Druckgleichgewicht auf den folgenden Ausdruck führt:

$$(\rho_2 - \rho_1)gk = \rho_1(k\tilde{u}_1 - \omega)^2 + \rho_2(k\tilde{u}_2 - \omega)^2 \tag{10}$$

Hinweis: Benutzen Sie, dass a in erster Näherung klein ist, also etwa $a \approx 0$

- Lösen Sie diesen Ausdruck für ω und diskutieren Sie anschließend.