INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

KLASSISCHE FELDTHEORIE — SoSe 2006

13. Übungsblatt — Abgabe: Mittwoch, 14.06.06 (bis 11.25 Uhr) im Kasten bei A316/A317

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

43. **Brechung und Reflexion an einer ebenen Grenzfläche II: TE-Welle** **(15 Punkte)**
Eine ebene elektromagnetische Welle

$$\underline{E} = \underline{E}_0\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)} \quad ; \quad \underline{B} = \frac{1}{\omega}\,\underline{k}\times\underline{E}$$

treffe bei $x_3 = 0$ auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei homogenen Dielektrika mit den Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_1 \neq 1, \epsilon_2 \neq 1$ und den Permeabilitäten $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Der Normalenvektor der Grenzfläche sei $\underline{e}_3$. Die einfallende Welle komme aus dem Medium 1.

(a) Welche Randbedingungen müssen die Felder $\underline{E}, \underline{D}, \underline{H}, \underline{B}$ bei $x_3 = 0$ erfüllen?

(b) Verwenden Sie für die reflektierte und die transmittierte Welle den Ansatz

$$\underline{E}^{R,T} = \underline{E}_0^{R,T}\, e^{i(\underline{k}^{R,T}\cdot\underline{r}-\omega^{R,T} t)} \quad .$$

Geben Sie die Dispersionsbeziehung $\omega(k)$ in beiden Medien an. Zeigen Sie die folgenden Relationen:

$$\omega = \omega^R = \omega^T \tag{1}$$

$$|\underline{k}^R| = |\underline{k}| \quad ; \qquad |\underline{k}^T| = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}|\underline{k}| \tag{2}$$

$$k_2 = k_2^T = k_2^R = 0 \quad ; \qquad k_1 = k_1^T = k_1^R \quad . \tag{3}$$

Nutzen Sie diese Beziehungen aus, um das Reflexionsgesetz ($k_3^R = -k_3$) und das Snelliussche Brechungsgesetz herzuleiten.

(c) Folgern Sie aus den Maxwellschen Gleichungen, daß es zwei unabhängige Sätze von Lösungen gibt:

$$\mathrm{TE-Welle:} \quad \{E_2, B_1, B_3\} \qquad ; \qquad \mathrm{TM-Welle:} \quad \{B_2, E_1, E_3\}$$

(TE: transversal-elektrische Welle, TM: transversal-magnetische Welle).

(d) Formulieren Sie alle Randbedingungen aus Aufgabenteil (a) so um, daß sich Bestimmungsgleichungen für die Amplituden $\underline{E}_0^R$ und $\underline{E}_0^T$ der reflektierten und der transmittierten Welle ergeben. Ermitteln Sie für die TE-Welle die Verhältnisse $t = |\underline{E}_0^T|/|\underline{E}_0|$ und $r = |\underline{E}_0^R|/|\underline{E}_0|$ und stellen Sie diese als Funktion von α (Einfallswinkel) und von ϵ_1 bzw. ϵ_2 dar. Plotten Sie $R = r^2$ und $T = 1 - R$ als Funktion des Einfallswinkels für $\epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = 4$ und $\epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = 1.5$. Diskutieren Sie den Verlauf.

(e) Betrachten Sie den Fall, daß das Licht vom optisch dichteren auf das optisch dünnere Medium einfällt ($\epsilon_2 < \epsilon_1$). Bestimmen Sie denjenigen Winkel α_{total}, ab dem Totalreflexion eintritt. Zeigen Sie, daß k_3^T für $\alpha > \alpha_{total}$ imaginär wird. Beschreiben Sie in Worten die Ortsabhängigkeit der transmittierten Welle für $\alpha > \alpha_{total}$. Zeigen Sie außerdem für die TE-Mode, daß die reflektierte Welle und die transmittierte Welle im Fall der Totalreflexion jeweils eine Phasenverschiebung δ^R, δ^T bezogen auf die einfallende Welle aufweisen. Ermitteln Sie δ^R und δ^T als Funktion von $\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha$. Geben Sie reelle Lösungen für $\underline{E}^T(\underline{r}, t)$ und $\underline{B}^T(\underline{r}, t)$ für $\alpha > \alpha_{total}$ an. Berechnen Sie im Bereich der Totalreflexion den Poynting-Vektor $\underline{\Pi}^T$ im Medium 2 und bilden Sie das zeitliche Mittel von Π_3^T.
Hinweis: Bei der Berechnung von $\underline{\Pi}$ müssen reelle Felder verwendet werden! Bei der Mittelwertbildung können Sie sich auf die Stelle $x_1 = 0$ beschränken.

Rückseite beachten! ⟶

44. **Vergütungsschicht** **(Bearbeitung freiwillig; + 15 Zusatzpunkte)**
Eine dielektrische Schicht mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_2 ist durch die Ebenen $x_3 = 0$ und $x_3 = d$ begrenzt und befindet sich zwischen zwei Medien mit ϵ_1 für $x_3 < 0$ und ϵ_3 für $x_3 > d$. Alle drei Medien seien ungeladen und nicht-magnetisch. Eine ebene elektromagnetische Welle falle vom Gebiet $x_3 < 0$ kommend senkrecht auf die Schicht ein.

(a) Welche Randbedingungen müssen die Felder bei $x_3 = 0$ bzw. $x_3 = d$ erfüllen?

(b) Berechnen Sie die Amplituden der Felder für die reflektierte (A^R_{ges}) und die transmittierte Welle (A^T_{ges}) für diese Anordnung. Dabei müssen Mehrfachreflexionen berücksichtigt werden. Führen Sie die folgenden Abkürzungen für die Verhältnisse der Amplituden (vgl. Aufgabe 43d) bei der *einfachen* Reflexion und Brechung an einer Grenzfläche ein:
r_{12}: Licht fällt aus dem Medium 1 auf das Medium 2 ein und wird reflektiert;
r_{21}: Licht fällt aus dem Medium 2 auf das Medium 1 ein und wird reflektiert.
Die Koeffizienten r_{23}, t_{12} und t_{21} seien analog definiert. Zeigen Sie:

$$A^R_{\text{ges}} = \left(r_{12} + \frac{t_{21} r_{23} t_{12} e^{i2k_2 d}}{1 - r_{23} r_{21} e^{i2k_2 d}} \right) A_0 \quad . \tag{4}$$

k_2 ist die Wellenzahl im Medium 2; A_0 ist die Amplitude der einfallenden Welle.

(c) Sei $\epsilon_1 = 1$ (Luft) und $\epsilon_3 = n^2$ (Glas). Zeigen Sie, daß für $\epsilon_2 = n$ die Reflexion verschwindet (Vergütung). Wie muß man d wählen?
Zeigen Sie dafür zunächst:

$$r_{ij} = \frac{\sqrt{\epsilon_i} - \sqrt{\epsilon_j}}{\sqrt{\epsilon_i} + \sqrt{\epsilon_j}} \quad \text{und} \quad t_{ij} = \frac{2\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\epsilon_i} + \sqrt{\epsilon_j}} \quad .$$

Drücken Sie alle auftretenden Koeffizienten durch n aus und setzen Sie diese in Gleichung (4) ein. Bestimmen Sie d für folgendes Zahlenbeispiel: Typischer Brechungsindex $n = 1.6$, Wellenlänge von sichtbarem Licht in Luft: $\lambda = 500\,\text{nm}$.