Übungsblatt 12

Abgabe: Mittwoch, 23. Januar 2013, vor der Vorlesung (bis 7.55 h)

Aufgabe 12.1 (10 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Lösungsskizze: Siehe Übung.

Aufgabe 12.2 (10 Punkte)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie eine Fundamentallösung von $U(t) = -iAU(t)$.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \dot{\psi}(t) = -iA\psi(t) + b, \quad \psi(0) = (1, 0, 2)^T.$$

Lösungsskizze:

a) Ist $A = CDC^{-1}$, so ist unsere Fundamentallösung durch $U(t) = \exp(-itA) = C\exp(-itD)C^{-1}$ gegeben.

Unsere Matrix ist symmetrisch, also diagonalisierbar mit orthogonaler Basiswechselmatrix C.

Wir rechnen die Eigenwerte von A aus: Mit Entwicklung nach der 2. Zeile erhalten wir $\det(A - \lambda E_3) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 13\lambda + 36)$.

Also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{13+5}{2} = 9$ und $\lambda_3 = \frac{13-5}{2} = 4$.

Lösen der Gleichungssysteme $(A - \lambda_i E_3)v = 0$ für $i = 1, 2, 3$ liefert Eigenvektoren $v_1 = (0, 1, 0)^T$ zu λ_1, $v_2 = (2, 0, 1)^T$ zu λ_2 und $v_3 = (-1, 0, 2)^T$ u λ_3.

Als Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind die v_i paarweise orthogonal und für die orthogonale Matrix

$$C := \left(\frac{1}{\|v_1\|_2} v_1 \mid \frac{1}{\|v_2\|_2} v_2 \mid \frac{1}{\|v_3\|_2} v_3 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt $A = C\,\mathrm{diag}(1, 9, 4)C^T$.

Also gilt für die Fundamentallösung U:

$$U(t) = C\exp(-it\,\mathrm{diag}(1, 9, 4))C^T = C \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-9it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4it} \end{pmatrix} C^T$$
$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4e^{-9it} + e^{-4it} & 0 & 2e^{-9it} - 2e^{-4it} \\ 0 & 5e^{-it} & 0 \\ 2e^{-9it} - 2e^{-4it} & 0 & e^{-9it} + 4e^{-4it} \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt $\det(-iA) = -36i \neq 0$, also ist $-iA$ invertierbar. Nach Vorlesung ist

$$\psi(t) = U(t)\psi(0) + (-iA)^{-1}U(t)b - (-iA)^{-1}b = U(t)\psi(0) + iA^{-1}U(t)b - iA^{-1}b\,.$$

Es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 36 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8e^{-9it} - 3e^{-4it} \\ 0 \\ 4e^{-9it} + 6e^{-4it} \end{pmatrix} + \frac{i}{36 \cdot 5}\begin{pmatrix} 16e^{-9it} + 9e^{-4it} & 0 & 8e^{-9it} - 18e^{-4it} \\ 0 & 36 \cdot 5e^{-it} & 0 \\ 8e^{-9it} - 18e^{-4it} & 0 & 4e^{-9it} + 36e^{-4it} \end{pmatrix} b - \frac{i}{12}\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8e^{-9it} - 3e^{-4it} \\ 0 \\ 4e^{-9it} + 6e^{-4it} \end{pmatrix} + \frac{i}{60}\begin{pmatrix} 16e^{-9it} + 9e^{-4it} \\ 60e^{-it} \\ 8e^{-9it} - 18e^{-4it} \end{pmatrix} - \frac{i}{12}\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Aufgabe 12.3 (optional)

Bestimmen Sie eine Fundamentallösung von $U(t) = A(t)U(t)$ für

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsskizze: Nach Vorlesung ist die gesuchte Fundamentallösung durch die Dysonreihe gegeben, also

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n A(t_1) \ldots A(t_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t A(t_1)\left(\int_0^{t_1} A(t_2)\left(\cdots\left(\int_0^{t_{n-2}} A(t_{n-1})\left(\int_0^{t_{n-1}} A(t_n)dt_{n-1}\right)dt_{n-2}\right)\cdots\right)dt_1\right)dt$$

Wir rechnen die n-ten Summanden $Q_n(t)$ aus:

$$n = 0: \quad Q_0(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(zu dieser Festsetzung s. Beweis v. Satz iV.11)}$$

$$n = 1: \quad Q_1(t) = \int_0^t A(t_1)dt_1 = \begin{pmatrix} \int_0^t t_1 dt_1 & 0 \\ 0 & \int_0^t dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} n = 2: \quad Q_2(t) &= \int_0^t A(t_1)\int_0^{t_1} A(t_2)dt_2dt_1 = \int_0^t A(t_1)Q_1(t_1)dt_1 = \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t_1^3 & 0 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix} dt_1 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\cdot 4}t^4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 3: \quad Q_2(t) &= \int_0^t A(t_1)\int_0^{t_1} A(t_2)\int_0^{t_2} A(t_3)dt_3dt_2dt_1 = \int_0^t A(t_1)\int_0^{t_1} A(t_2)Q_1(t_2)dt_2dt_1 \\ &= \int_0^t A(t_1)Q_2(t_1)dt_1 = \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2\cdot 4}t_1^5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}t_1^2 \end{pmatrix} dt_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}t^6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\cdot 3}t^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Behauptung:Für $n \geq 1$ ist

$$Q_n(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\cdot n!}t^{2n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n!}t^n \end{pmatrix}.$$

Für $n = 1$ schon gezeigt.
Die Behauptung gelte für festes $n \geq 1$. Daraus folgt

$$Q_{n+1} = \int_0^t A(t_1)Q_n(t_1)dt_1 = \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2\cdot n!}t_1^{2n} + 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n!}t_1^n \end{pmatrix} dt_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\cdot n!(2n+2)}t^{2n+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n!(n+1)}t^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Also gilt die Behauptung. Aufsummieren und Grenzwert für $n \to \infty$ bilden liefert

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t) = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^2 t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Vorlesung: 8-9.30h, PK 2.2
Übungen: siehe Website
Website zur Vorlesung: http://www.iaa.tu-bs.de/vbach/