Übungsblatt 11

Abgabe: Mittwoch, 16. Januar 2013, vor der Vorlesung (bis 7.55 h)

Aufgabe 11.1 (10 Punkte)

Berechnen Sie eine Fundamentallösung für

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \end{cases}$$

und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem mit Anfangsbedingung $\phi(0) = (0, 1, 4)^T$.

Lösungsskizze: Siehe Übung.

Aufgabe 11.2 (10 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\forall t > 0 : \quad \dddot{x}(t) + 6\ddot{x}(t) + 12\dot{x}(t) + 8x(t) = 0\,, \qquad x(0) = 2\,,\ \dot{x}(0) = -1\,,\ \ddot{x}(0) = -8\,.$$

Lösungsskizze: Siehe Übung.

Aufgabe 11.3 (optional)

Es sei X der zweidimensionale Unterraum von $C(\mathbb{R})$, der von sin und cos aufgespannt wird. Weiter sei die lineare Abbildung $A : X \to X$ durch $A(\sin) = 2\sin$ und $A(\cos) = \sin + \cos$ gegeben.

a) Berechnen Sie eine Fundamentallösung von $\dot{U}(t) = AU(t)$.

b) Lösen Sie für $\phi_0 \in X$ beliebig das Anfangswertproblem

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \dot{\phi}(t) = A\phi(t)\,, \quad \phi(0) = \phi_0\,.$$

Lösungsskizze:

1. Wir rechnen mit Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (\sin, \cos)$ des gegegebenen Unterraums von $C(\mathbb{R})$.

   Die Abbildungsmatrix B von A bezüglich $\mathcal{B}$ ist

   $$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Als obere Dreiecksmatrix hat B die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$.

   Die Lösungsräume von $(B - \lambda_i E_2)v = 0$ sind durch

   $$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{für } i = 1$$

   beziehungsweise

   $$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{für } i = 2$$

   gegeben. Also sind $v_1 := (1, 0)^T$ und $v_2 := (1, -1)^T$ Eigenvektoren zu 2 bzw. 1.

   Somit gilt für

   $$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dass $B = CDC^{-1}$. Wegen $C^{-1} = C$ gilt also

$$\exp(tB) = C \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Das ist nun gerade die Abbildungsmatrix von $\exp(tA)$ bzgl. $\mathcal{B}$, also bekommen wir die Fundamentallösung $U(t)$ mit

$$U(t)(\alpha \sin + \beta \cos) = ((\alpha + \beta)e^{2t} - \beta e^t) \sin + \beta e^t \cos .$$

Aufgabe 11.4 (optional)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \ddot{x}(t) = 5\dot{x}(t) - 6x(t)\,, \quad x(0) = 1,\, \dot{x}(0) = 0\,.$$

Lösungsskizze:
1. Version: Wir lösen das zu unserem Problem 2. Ordnung äquivalente lineare, homogene Anfangswertproblem

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t)\,, \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0\,,$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_0 = (1,0)^T\,.$$

A hat das charakteristische Polynom $\det(A - \lambda E_2) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ und wir erhalten mit der p-q-Formel die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 2$.
Die Lösungsmengen der Gleichungssysteme $(A - \lambda_i E_2)v = 0$ sind durch $\mathbb{R} \cdot (1,3)^T$ für λ_1 und $\mathbb{R} \cdot (1,2)^T$ für λ_2 gegeben.
Also gilt mit $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, dass

$$A = C \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} C^{-1}\,.$$

Wegen $C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$\exp(tA) = C \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{3t} + 3e^{2t} & e^{3t} - e^{2t} \\ -6e^{3t} + 6e^{2t} & 3e^{3t} - 2e^{2t} \end{pmatrix},$$

und folglich

$$\vec{x}(t) = \exp(tA)\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -2e^{3t} + 3e^{2t} \\ -6e^{3t} + 6e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Da die Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems erster Ordnung nach Konstruktion des Gleichungssystems gerade die erste Zeile der Lösung des Systems ist, erhalten wir

$$x(t) = 2e^{3t} + 3e^{2t}\,.$$

2. Version: Wir arbeiten mit dem Ansatz $x(t) = \sum_\alpha \sum_q K_{\alpha q} t^q e^{\lambda_\alpha}$: Die Matrix des zum AWP

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \ddot{x}(t) = 5\dot{x}(t) - 6x(t)\,, \quad x(0) = 1,\, \dot{x}(0) = 0\,.$$

ist Begleitmatrix A ihres charakteristischen Polynoms, hat also das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)\,.$$

A hat also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 2$, jeweils mit arithmetischer Vielfachheit 1.
Also ist nach Vorlesung/Übung

$$x(t) = \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{q=0}^{0} K_{\alpha q} t^q e^{\lambda_\alpha t} = K_{10}e^{3t} + K_{20}e^{2t}\,.$$

Es folgt

$$\dot{x}(t) = 3K_{10}e^{3t} + 2K_{20}e^{2t}$$

und Einsetzen von $t = 0$ liefert mit der Anfangsbedingung das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{10} \\ K_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der eindeutigen Lösung $(-2, 3)^T$, also

$$x(t) = -2e^{3t} + 3e^{2t}\,.$$
