INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

KLASSISCHE FELDTHEORIE — SOSE 2006

11. Übungsblatt — Abgabe: Mittwoch, 31.05.06 (bis 11.25 Uhr) im Kasten bei A316/A317

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

37. **Maxwellsche Gleichungen im Vakuum I** **(3 Punkte)**
Wir betrachten einige einfache Beispiele. Es gelte stets $\underline{j} = \underline{0}$ und $\rho = 0$.

(a) Wie lauten die Maxwellschen Gleichungen für $\underline{E}$ und $\underline{B}$?

(b) Leiten Sie die homogenen Wellengleichungen für $\underline{E}$ und $\underline{B}$ aus den Maxwellschen Gleichungen ab, ohne die Potentiale zu verwenden.

(c) Das elektrische Feld sei als ebene Welle in der Form

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \frac{E_0}{5}(\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2)e^{i(kx_3 - \omega t)} \quad ; \quad \underline{k} = k\,\underline{e}_3$$

vorgeben. Berechnen Sie die magnetische Induktion $\underline{B}$ und geben Sie deren Polarisation an.

(d) Die magnetische Induktion sei als ebene Welle vom Typ

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = B_0 \cos(kx_3 - \omega t)\underline{e}_1 + B_0 \sin(kx_3 - \omega t)\underline{e}_2$$

vorgegeben. Berechnen Sie das elektrische Feld $\underline{E}$ und geben Sie die Polarisation von $\underline{E}$ an.

38. **Maxwellsche Gleichungen im Vakuum II: Kugelkoordinaten** **(5 Punkte)**
Diskutieren Sie, unter welchen Bedingungen an $E_0(\theta)$ und k der folgende Ansatz für das elektrische Feld Lösungen der Maxwellschen Gleichungen im Vakuum ergibt ($\underline{j} = \underline{0}$, $\rho = 0$):

$$\underline{E} = E(r, \theta, t)\,\underline{e}_\theta = \frac{E_0(\theta)}{r} e^{i(kr - \omega t)}\,\underline{e}_\theta \quad ; \qquad \underline{k} = k\underline{e}_r \quad .$$

Ermitteln Sie die magnetische Induktion $\underline{B}$ und überprüfen Sie alle vier Maxwellschen Gleichungen. Geben Sie reelle Lösungen für $\underline{E}$ und $\underline{B}$ an und berechnen Sie den Poynting-Vektor $\underline{\Pi}$. Bestimmen Sie dessen zeitlichen Mittelwert $\langle \underline{\Pi} \rangle = (1/T) \int_0^T \mathrm{d}t\, \underline{\Pi}(t)$. Warum müssen zur Berechnung dieses Mittelwertes die *reellen* Lösungen für $\underline{E}$ und $\underline{B}$ verwendet werden?

39. **Wellenausbreitung im Ohmschen Leiter** **(6 Punkte)**
Wir betrachten die Ausbreitung ebener elektromagnetischer Wellen $\underline{E}, \underline{B}, \underline{D}, \underline{H} \propto \exp\{i\,(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)\}$ in einem Metall, in dem das Ohmsche Gesetz $\underline{j} = \sigma \underline{E}$ gilt. Die Leitfähigkeit σ ist eine Konstante. Für die übrigen Materialparameter soll $\epsilon = \mu = 1$ gelten. Die Ladungsdichte ist durch $\rho\,(\underline{r}, t) = 0$ gegeben.

(a) Leiten Sie die Wellengleichung für das elektrische Feld $\underline{E}$ her und ermitteln Sie die Dispersionsrelation in der Form $k^2 = f(\omega)$. Zeigen Sie, daß k komplex ist und daß $\underline{E}$ und $\underline{B}$ nicht in Phase sind. Welche Konsequenz ergibt sich für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, wenn der Wellenvektor $\underline{k}$ komplex ist?

(b) Berechnen Sie die Joulesche Verlustleistungsdichte gemittelt über eine Schwingungsperiode als Funktion der Eindringtiefe x_3. Sie können voraussetzen, daß der Wellenvektor $\underline{k}$ in x_3-Richtung weist und das elektrische Feld der Welle in x_1-Richtung polarisiert ist.

(c) Berechnen Sie den Mittelwert von $\nabla \cdot \underline{\Pi}$ über eine Schwingungsperiode und vergleichen Sie mit dem Ergebnis von Teilaufgabe (b).

Rückseite beachten! ⟶

40. **Retardierte Potentiale** **(12 Punkte)**

Eine homogen geladene Vollkugel mit dem Radius R und der Gesamtladung Q beginne zur Zeit $t = 0$ um eine feste Achse durch ihren Mittelpunkt mit konstanter Winkel*beschleunigung* $\underline{\alpha}$ zu rotieren. Der Mittelpunkt der Kugel sei $\underline{0}$. Bestimmen Sie mittels der retardierten Potentiale

$$\Phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3\underline{r}\,' \frac{\rho(\underline{r}\,', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}\,'|}{c})}{|\underline{r}-\underline{r}\,'|} \quad \text{und} \quad \underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathrm{d}^3\underline{r}\,' \frac{\underline{j}(\underline{r}\,', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}\,'|}{c})}{|\underline{r}-\underline{r}\,'|}$$

das von dieser Ladungs- und Stromverteilung erzeugte elektromagnetische Feld (also $\underline{E}$ und $\underline{B}$) in den Raumpunkten $\underline{r}$ mit $|\underline{r}| > R$ und für Zeiten t mit $ct \leq |\underline{r}| - R$ bzw. $ct \geq |\underline{r}| + R$. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch und interpretieren Sie die einzelnen Beiträge zu $\underline{E}$ und $\underline{B}$ (eine Skizze könnte hilfreich sein). Erläutern Sie insbesondere die Zeitabhängigkeit von $\underline{E}(\underline{r},t)$ und $\underline{B}(\underline{r},t)$ für $|\underline{r}| > R$ und gehen Sie (qualitativ) auf den Zeitraum $|\underline{r}| - R < ct < |\underline{r}| + R$ ein.

41. **Separationsansatz in kartesischen Koordinaten III** **(4 Punkte)**

Lösen Sie die Laplace-Gleichung $\triangle\Phi\,(\underline{r}) = 0$ im Gebiet

$$\mathcal{G} = \{ \quad \underline{r} = (x_1, x_2) \quad | \quad 0 \leq x_1 \leq a \quad ; \quad 0 \leq x_2 \leq \infty \quad \}$$

mit Hilfe eines Separationsansatzes unter den Randbedingungen

$$\Phi\,(0, x_2) = \Phi\,(a, x_2) = 0 \quad , \quad \Phi\,(x_1, 0) = \Phi_0 \neq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x_2 \to \infty} \Phi\,(x_1, x_2) = 0 \quad .$$