Übungsblatt 10

Abgabe: Mittwoch, 9. Januar 2013, vor der Vorlesung (bis 7.55 h)

Aufgabe 10.1 (10 Punkte)

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad \dot{\varphi}(t) = A\varphi(t)\,, \quad \varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungsskizze: Siehe Übung.

Aufgabe 10.2 (10 Punkte)

Es sei

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von B.
2. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad \dot{\psi}(t) = -iB\psi(t)\,, \quad \psi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet.

Lösungsskizze: Siehe Übung.

Aufgabe 10.3 (optional)

Zeigen Sie:

a)

$$\exp \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{\mu} \end{pmatrix}$$

b)

$$\exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^{a} \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$$

Lösungsskizze:

a) Sei

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Es gilt nach Vorlesung $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$.
Da A eine Diagonalmatrix ist, gilt

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \mu^k \end{pmatrix},$$

also

$$\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{\mu^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{\mu} \end{pmatrix}.$$

b) Für Matrizen A, B mit $AB = BA$ gilt $\exp(A+b) = \exp(A)\exp(B)$.

Setze
$$A := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$
Wir bezeichnen die Einheitsmatrix mit E_2 und
$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
. Dann gilt $A = aE_2 + bJ$. Da Vielfache der Einheitsmatrix mit allen quadratischen Matrizen vom selben Format vertauschen folgt mit Teil a), dass
$$\exp(A) = \exp(aE_2 + bJ) = \exp(aE_2)\exp(bJ) = e^a E_2 \exp(bJ) = e^a \exp(bJ)\,.$$
Nun berechnen wir $\exp(bJ) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} J^k$. Es gilt
$$\begin{aligned} J^0 &= E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ J^1 &= J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ J^2 &= J \cdot J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E_2 \\ J^3 &= J(-E_2) = -J = J^T \\ J^4 &= J \cdot J^T = E_2\,, \end{aligned}$$
die Folge der Potenzen von J wird also periodisch, zusammengefasst erhalten wir
$$J^k = \begin{cases} (-1)^l E_2\,, & \text{für } k = 2l \\ (-1)^l J\,, & \text{für } k = 2l+1 \end{cases},$$
also für die einzelnen Einträge
$$J^k_{1,1} = J^k_{2,2} = \begin{cases} (-1)^l\,, & k = 2l \\ 0\,, & k = 2l+1 \end{cases},$$
also $\exp(bJ)_{1,1} = \exp(bJ)_{2,2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} b^{2l} = \cos(b)$.

Weiter ist
$$J^k_{2,1} = \begin{cases} 0\,, & k = 2l \\ (-1)^l\,, & k = 2l+1 \end{cases}$$
und daher $\exp(bJ)_{2,1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} b^{2l+1} = \sin(b)$. Schließlich gilt $J^k_{1,2} = -J^k_{2,1}$ für alle $k \geq 0$, also $\exp(bJ)_{1,2} = -\exp(bJ)_{2,1} = -\sin(b)$.

Zusammengefasst erhalten wir
$$\exp(bJ) = \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$$
und damit die Behauptung.

Aufgabe 10.4 (optional)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie: A ist genau dann schiefsymmetrisch, d.h. $A^T = -A$, wenn für jede Lösung φ des Systems
$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t)$$
die Abbildung $t \mapsto \|\varphi(t)\|_2$ konstant ist.

Lösungsskizze: Wir bemerken, dass für festes φ die Abbildung $t \mapsto \|\varphi(t)\|_2$ konstant ist, genau dann, wenn $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(t) = \|\varphi(t)\|_2^2$ konstant ist. Da jede Lösung unserer Differenzialgleichung differenzierbar ist, ist die zweite Abbildung differenzierbar und es gilt g konstant, genau dann, wenn $\dot{g} \equiv 0$.

Sei nun φ eine beliebige Lösung der Dgl. Im Folgenden bezeichnen wir mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ Wir rechnen nun zunächst die Ableitung von g aus: Mit $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)^T$ ist $\dot\varphi = (\dot\varphi_1, \dot\varphi_2)^T$. Ableitungsregeln und Einsetzen der rechten Seite der Dgl liefert uns also

$$\begin{aligned}\dot g(t) &= \frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|^2 = \frac{d}{dt}(\varphi_1(t)^2 + \varphi_2(z)^2) = 2\varphi_1(t)\dot\varphi_1(t) + 2\varphi_2(t)\dot\varphi_2(t)\\ &= 2\langle\varphi(t),\dot\varphi(t)\rangle = \langle\varphi(t),\dot\varphi(t)\rangle + \langle\dot\varphi(t),\varphi(t)\rangle = \varphi(t)^T\dot\varphi(t) + \dot\varphi(t)\varphi(t)\\ &= \varphi(t)^TA\varphi(t) + (A\varphi(t))^T\varphi(t) = \varphi(t)^TA\varphi(t) + \varphi(t)^TA^T\varphi(t) = \varphi(t)^T(A + A^T)\varphi(t)\,.\end{aligned}$$

Also gilt $\dot g(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\varphi(t)^T(A + A^T)\varphi(t) = 0$ für alle t.
Ist nun A schiefsymmetrisch, also $A^T = -A^T$ ist diese Bedingung für alle Lösungen erfüllt.
Umgekehrt existiert zu jedem $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine Lösung φ_v unserer DGL mit $\varphi(0) = v$ (Anfangswert entsprechend wählen). Also folgt aus $\dot g(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, dass $0 = v^T(A + A^T)v = \langle v$, für alle $v \in \mathbb{R}$ und daraus folgt, dass $A + A^t = 0$, also A schiefsymmetrisch.