



33. Elektromagnetische Potentiale

(12 Punkte)

In dieser Aufgabe soll das Rechnen mit den elektromagnetischen Potentialen (\underline{A}, Φ) geübt werden.

- (a) Gegeben sei das Vektorpotential

$$\underline{A} = ((6x_1 - 1)x_2 + x_3, 3x_1^2 - x_3 + x_1, x_1 - x_2) \quad .$$

Bestimmen und skizzieren Sie das magnetische Feld. Geben Sie die Quellen und Wirbel von \underline{B} an. Das Vektorpotential legt das elektrische Feld noch nicht fest. Welche Bedingungen an das elektrische Feld ergeben sich hier aus den Maxwell'schen Gleichungen? Berechnen Sie $\text{div}\underline{A}$. Geben Sie eine Eichtransformation an, so daß die Coulomb-Eichung erfüllt ist.

- (b) Diskutieren Sie das Vektorpotential $\underline{A} = e^{-t/\tau}(x_1x_2, -x_3^2, x_1x_3)$ mit $\tau > 0$. Berechnen Sie die magnetische Induktion \underline{B} . Zeigen Sie, daß $\text{div}\underline{A} \neq 0$ ist. Geben Sie eine Eichtransformation χ an, so daß $\underline{A}' = \underline{A} + \nabla\chi$ die Coulomb-Eichung erfüllt. Welche Bestimmungsgleichung muß χ erfüllen? Durch die Angabe des Vektorpotentials ist das elektrische Feld \underline{E} noch nicht festgelegt. Nehmen Sie an, daß es keine Quellen gibt und ermitteln Sie \underline{E} .
- (c) Betrachten Sie jetzt folgende Potentiale:

$$\underline{A} = \frac{a}{c^2}(-x_3^2/2 + 2x_1 + x_3, (x_1 + 2)x_2, x_1) \quad ; \quad \Phi = -ax_1t \quad ; \quad a = \text{const} \quad .$$

- i. Berechnen Sie \underline{E} und \underline{B} sowie die Wirbel und Quellen der Felder. Skizzieren Sie \underline{E} und \underline{B} . Was erhalten Sie für die Stromdichte \underline{j} und die Ladungsdichte ρ ?
- ii. Erfüllen das Vektorpotential \underline{A} und das skalare Potential Φ die Lorentz-Eichung? Wenn nicht, geben Sie eine Eichtransformation $(\underline{A}, \Phi) \rightarrow (\underline{A}', \Phi')$ an, so daß \underline{A}' und Φ' die Lorentz-Eichung erfüllen.

34. Lagrange- und Hamiltonfunktion für eine Punktladung

(10 Punkte)

Die Bewegung eines geladenen Punktteilchens (Ladung Q , Masse M) im elektromagnetischen Feld $(\underline{E}, \underline{B})$ wird durch die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) = \frac{1}{2}M\dot{\underline{r}}^2 - Q\Phi(\underline{r}, t) + Q\dot{\underline{r}} \cdot \underline{A}(\underline{r}, t)$$

beschrieben, wobei \underline{A} und Φ die elektromagnetischen Potentiale sind.

- (a) Zeigen Sie, daß die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen in der Form

$$M\ddot{\underline{r}} = Q(\underline{E} + \dot{\underline{r}} \times \underline{B}) \quad (1)$$

geschrieben werden können.

- (b) Bestimmen Sie die zur Lagrange-Funktion \mathcal{L} gehörende Hamilton-Funktion \mathcal{H} .
- (c) Stellen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen auf. Reproduzieren Sie damit das Ergebnis von Teilaufgabe (a).

Rückseite beachten! \longrightarrow

35. Oszillierendes Vektorpotential**(5 Punkte)**

In einem homogenen, isotropen Medium sei das Vektorpotential

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \underline{A}_0 \cos(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t + \xi_0)$$

gegeben, wobei \underline{A}_0 , \underline{k} , ω und ξ_0 Konstanten sind. Zudem sollen die Vektoren \underline{A}_0 und \underline{k} aufeinander senkrecht stehen. Für das skalare Potential gelte $\Phi = 0$.

- Berechnen Sie die elektromagnetischen Felder \underline{E} und \underline{B} .
- Bestimmen Sie den Poynting-Vektor \underline{II} sowie dessen zeitlichen Mittelwert über eine Periode $T = 2\pi/\omega$. Wie ist dieser Mittelwert anschaulich zu interpretieren?
- Leiten Sie aus dem Poynting-Theorem für ein verlustfreies Medium eine Beziehung zwischen ω und \underline{k} ab.

36. Wellengleichungen in Materie**(3 Punkte)**

In der Vorlesung haben Sie gelernt, daß die elektromagnetischen Potentiale \underline{A} und ϕ in der Lorentz-Eichung inhomogenen Wellengleichungen genügen. Es soll nun gezeigt werden, daß sich derartige Wellengleichungen auch für \underline{E} , \underline{B} , \underline{D} und \underline{H} unmittelbar aus den Maxwell-Gleichungen gewinnen lassen. Betrachten Sie dazu ein Medium, das durch die Materialgleichungen $\underline{B} = \mu_0 \mu \underline{H}$ und $\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon \underline{E}$ beschrieben wird. Die Materialparameter μ und ϵ sollen zeitlich und räumlich konstant sein. Zeigen Sie, daß in einem solchen Medium die Felder \underline{E} , \underline{B} , \underline{D} und \underline{H} inhomogenen Wellengleichungen genügen.

Termine

- Vor der Klausur bieten wir zwei zusätzliche Fragestunden an: **Dienstag, d. 06.06.06 und Donnerstag, d. 08.06.06, jeweils um 13:00 Uhr in MS 3.2**. An diesen Terminen werden ausschließlich Fragen der Klausurteilnehmer beantwortet. Es werden *keine* neuen klausurrelevanten Themen besprochen. Die Teilnahme ist daher nicht zwingend erforderlich.
- Die erste Klausur findet am **Freitag, d. 09.06.06 von 9.00 Uhr bis 11.30 Uhr im Hörsaal MS 3.1** statt. Hilfsmittel jeglicher Art (Taschenrechner, Formelsammlungen, Vorlesungsmitschrift etc.) sind *nicht* zugelassen, Papier wird gestellt.
- Bitte bringen Sie zur Klausur einen gültigen Lichtbildausweis sowie Ihren Studentenausweis mit.