Übungsblatt 9

Abgabe: Mittwoch, 19. Dezember 2012, vor der Vorlesung (bis 7.55 h)

Aufgabe 9.1 (10 Punkte)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $x \in C(I, \mathbb{R})$ so, dass

$$\forall t \in I : \quad \dot{x}(t) = 1 - x(t)^3$$

erfüllt ist.
Zeigen Sie, es existiert ein offenes Intervall $\tilde{I}$ so, dass $x_{|\tilde{I}}$ entweder streng monoton ist oder $x_{|\tilde{I}} \equiv 1$ gilt.

Lösungsskizze: Siehe Übung.

Aufgabe 9.2 (10 Punkte)

Zeigen Sie das für $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f[t, (x_1, x_2)] = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

das Anfangswertproblem

$$\forall t \geq 0 : \quad \dot{x}(t) = f[t, x(t)] , \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung hat und berechnen Sie diese.

Lösungsskizze: Siehe Übung.

Aufgabe 9.3 (optional)

Lösen Sie für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig das Anfangswertproblem

$$\forall t \geq 0 : \quad \dot{x}(t) = Ax(t) , \quad x(0) = x_0 .$$

Lösungsskizze: Sei $\| \cdot \|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\| \cdot \|_{OP}$ die zugeordnete Matrixnorm.
Dann gilt für $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(t, x) = Ax$ und beliebige x_1, $x_2 \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| = \|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leq \|A\|_{OP} \|x_1 - x_2\| ,$$

also ist f global Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
Außerdem gilt für $\tilde{M} \geq 0$ beliebig, dass

$$\|e^{-\tilde{M}t} f(t, x_0)\| = \|e^{-\tilde{M}t} Ax_0\| = e^{-\tilde{M}t} \|Ax_0\| < \infty ,$$

also ist $t \mapsto f(t, x_0)$ exponentiell beschränkt.
Damit hat das AWP nach Satz III.5 eine eindeutige Lösung, die man nach Beweis von Satz III.5 durch Picard-Iteration erhält, also $x(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t)$ mit

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \quad \text{und} \\ x_n(t) &= x_0 + \int_0^t f(s, x_{n-1}(s)) ds = x_0 + \int_0^t A x_{n-1}(s) ds \text{ für } n \geq 1 . \end{aligned}$$

Vorüberlegung: Da Matrizen komponentenweise integriert werden, gilt mit $B = (b_{ij})_{i,j}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$:

$$\int_0^t cs^k Bxdy = \int_0^t cs^k \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \right)^T_{1 \le i \le n} ds = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n b_{1j} x_j c \int_0^t s^k ds \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n b_{nj} x_j c \int_0^t s^k ds \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n b_{1j} x_j \frac{c}{k+1} t^{k+1} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n b_{nj} x_j \frac{c}{k+1} t^{k+1} \end{pmatrix} = \frac{c}{k+1} t^{k+1} Bx \,.$$

Wir zeigen nun mit vollständiger Induktion, dass für $n \geq 0$

$$x_n(t) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (tA)^k \right) x_0$$

gilt.
$n = 0$: $x_0(t) = x_0 = E_n x_0 = (tA)^0 x_0$, wobei E_n die Einheitsmatrix bezeichnet.
Die Behauptung gelte für ein festes $n \geq 0$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung und unserer Vorüberlegung

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t \left(A \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} s^k A^k \right) x_0 \right) ds = x_0 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(k+1)} t^{k+1} A^{k+1} x_0$$
$$= \left(E_n + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+1)!} (tA)^{k+1} \right) x_0 = \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} (tA)^k \right) x_0 \,.$$

Somit ist

$$x(t) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} (tA)^k \right) x_0 = \exp(tA) x_0 \,.$$

Aufgabe 9.4 (optional)

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\forall t \geq 0: \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) \,, \quad x(0) = x_0 \,.$$

für

$$A(t) := \begin{pmatrix} \sin(t) + \cos(t) & \sin(t) - \cos(t) \\ \sin(t) - \cos(t) & \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

Lösungsskizze: Nach Satz III.15 genügt es zu zeigen, dass $f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t, x) = A(t)x$ global Lipschitz-stetig ist und dass $t \mapsto f(t, x_0)$ exponentiell beschränkt ist.

(i) globale Lipschitz-Stetigkeit: Da alle Normen auf dem $\mathbb{R}^2$ äquivalent sind, können wir mit einer beliebigen Norm arbeiten. Wir betrachten die Maximumsnorm.

Seien $t \geq 0$, x_1, $x_2 \in \mathbb{R}^2$ beliebig.

Da $A(t)$ linear ist, gilt

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_\infty = \|A(t)(x_1 - x_2)\|_\infty \leq \|A(t)\|_{OP} \|x_1 - x_2\|_\infty.$$

Bleibt zu zeigen: Es existiert ein $M \geq 0$, sodass $\|A(t)\|_{OP} \leq M$ für alle $t \geq 0$.

Es gilt $\|A(t)\|_{OP} = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \frac{\|A(t)x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|A(t)x\|_\infty$.

Nun gilt für $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_\infty = 1$ beliebig, dass

$$\|A(t)x\|_\infty = \max_{1 \le k \le 2} |(A(t)x)_k| = \max_{1 \le k \le 2} |\sum_{j=1}^2 a_{kj}(t) x_j|$$
$$\leq \|x\| \max_{1 \le k \le 2} \sum_{j=1}^2 |a_{kj}(t)| \leq 2(|\cos(t)| + |\sin(t)|) \leq 4 \,.$$

(ii) Exponentielle Beschränktheit: Sei $\tilde{M} := 1$, $t \geq 0$ beliebig. Dann ist

$$\|e^{-t\tilde{M}} f(t, x_0)\| = e^{-t}\|A(t)x_0\|_\infty \leq e^{-t}\|A(t)\|_{OP}\|x_0\|_\infty 4\|x_0\| < \infty\,.$$

Also ist $t \mapsto f(t, x_0)$ exponentiell beschränkt.

Vorlesung: 8-9.30h, PK 2.2
Übungen: siehe Website
Website zur Vorlesung: http://www.iaa.tu-bs.de/vbach/