INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

KLASSISCHE FELDTHEORIE — SoSe 2006

9. Übungsblatt — Abgabe: keine, Besprechung in den Übungen am 17.05.06

**Fragen zu den Übungsaufgaben:** S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

32. **Elektromagnetische Potentiale und Eichungen**
Wir betrachten die Maxwellschen Gleichungen für ein homogenes, isotropes Medium und wählen für die Materialkonstanten ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\epsilon = \mu = 1$:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \underline{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} &(1)\\ \nabla \cdot \underline{B} &= 0 &(2)\\ \nabla \times \underline{E} &= -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} &(3)\\ \nabla \times \underline{B} &= \mu_0 \underline{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \quad . &(4)\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, daß die homogenen Gleichungen (2) und (3) durch den Ansatz

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} \quad \text{und} \quad \underline{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$$

gelöst werden.

(b) Zeigen Sie, daß die Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ invariant unter Eichtransformationen der Form

$$\underline{A} \to \underline{A}' = \underline{A} + \nabla\chi \quad \text{und} \quad \Phi \to \Phi' = \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

sind. Mit $\chi$ wird eine beliebige skalare Funktion bezeichnet.

(c) Leiten Sie aus den inhomogenen Maxwell-Gleichungen und die Beziehungen

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{A} - \nabla\left(\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \underline{j} \qquad (5)$$

und

$$\triangle\Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \underline{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad (6)$$

her.

(d) *Lorentz-Eichung*: Arbeiten Sie die Bedingung

$$\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

in die Gln. (5) und (6) ein. Zeigen Sie, daß die Potentiale $\underline{A}$ und $\Phi$ in diesem Fall den inhomogenen Wellengleichungen

$$\Box\, \underline{A} = -\mu_0 \underline{j} \quad \text{und} \quad \Box\, \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

genügen.

(e) Zeigen Sie, daß die Lorentz-Bedingung stets erfüllt werden kann. Nehmen Sie dazu zunächst

$$\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \alpha(\underline{r}, t) \neq 0$$

an und zeigen Sie, daß eine geeignete Eichfunktion $\chi$ zur Erfüllung der Lorentz-Eichung aus der inhomogenen Wellengleichung

$$\Box\, \chi(\underline{r}, t) = -\alpha(\underline{r}, t)$$

bestimmt werden kann. Daran sehen Sie, daß auch die Wahl von $\chi$ noch nicht eindeutig ist, da zu $\chi$ noch jede Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\Box\, \Lambda(\underline{r}, t) = 0$$

addiert werden kann. Die Lorentz-Bedingung definiert damit eine ganze *Eichklasse*.

*Rückseite beachten!* ⟶

(f) *Coulomb-Eichung*: Arbeiten Sie die Bedingung

$$\nabla \cdot \underline{A} = 0$$

in Gl. (6) ein. Zeigen Sie, daß das skalare Potential $\Phi$ der Poisson-Gleichung

$$\triangle \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

genügt und geben Sie die Lösung dieser Gleichung an.

(g) Die Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}, t)$ läßt sich in einen longitudinalen (rotationsfreien) Anteil $\underline{j}_l(\underline{r}, t)$ und einen transversalen (divergenzfreien) Anteil $\underline{j}_t(\underline{r}, t)$ zerlegen:

$$\underline{j}(\underline{r}, t) = \underline{j}_l(\underline{r}, t) + \underline{j}_t(\underline{r}, t) \quad .$$

Dabei gilt:

$$\underline{j}_l(\underline{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\nabla' \cdot \underline{j}(\underline{r}', t)}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad \text{und} \quad \underline{j}_t(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\nabla' \times \underline{j}(\underline{r}', t)}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad .$$

Zeigen Sie unter Benutzung dieser Zerlegung und der Kontinuitätsgleichung, daß das Vektorpotential $\underline{A}$ in der Coulomb-Eichung die inhomogene Wellengleichung

$$\Box \underline{A}(\underline{r}, t) = -\mu_0 \underline{j}_t(\underline{r}, t)$$

erfüllt. Die Coulomb-Eichung wird deshalb auch *transversale Eichung* genannt.

(h) Zeigen Sie, daß auch die Coulomb-Eichung stets erfüllbar ist. Nehmen Sie dazu zunächst

$$\nabla \cdot \underline{A} \equiv \beta(\underline{r}, t) \neq 0$$

an und zeigen Sie, daß eine geeignete Eichfunktion $\chi$ aus der Poisson-Gleichung

$$\triangle \chi = -\beta(\underline{r}, t)$$

bestimmt werden kann. Wie sieht demnach die allgemeine Form von $\chi$ aus?