Übungsblatt 8

Abgabe: Mittwoch, 12. Dezember 2012, vor der Vorlesung (bis 7.55 h)

Aufgabe 8.1 (10 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t, x) = \sqrt{|x|}$.

a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \dot{x} = f(t, x)\,, \quad x(0) = 0$$

mindestens zwei Lösungen in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ hat.

Hinweis: Um einen Kandidaten für eine Lösung zu bekommen, betrachten Sie zunächst die Fälle $x(t) < 0$ und $x(t) > 0$ getrennt und finden Sie Lösungen der Differenzialgleichung für diese Fälle, die sich geeignet zu einer Lösung des AWP zusammensetzen lassen.

b) Wieso widerspricht dies nicht Satz III.9?

Lösungsskizze: Siehe Übung.

Aufgabe 8.2 (10 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t, x) = -x^2$. Bestimmen Sie zu den folgenden Anfangswertproblemen jeweils eine maximale Lösung und beweisen Sie die Maximalität anhand der Definition aus Satz III.9. Skizzieren Sie die Lösungen.

a)

$$\dot{x} = f(t, x)\,, \quad x(0) = 0.$$

b)

$$\dot{x} = f(t, x)\,, \quad x(1) = 1.$$

Lösungsskizze: Siehe Übung

Aufgabe 8.3 (optional)

Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t, x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\,, & \text{für } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, f ist (total) differenzierbar aber nicht lokal Lipschitz-stetig.

b) Wieso widerspricht dies nicht Lemma III.11?

Lösungsskizze:

a) *Totale Differenzierbarkeit:* Da f in allen Punkten $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$ stetig partiell differenzierbar ist, ist f dort auch total differenzierbar.

Es bleibt zu zeigen: f ist auch in $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ total differenzierbar, dh es ist zu zeigen, dass für $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\lim_{(t,x)\to(t_0,0)} \frac{|f(t, x) - f(t_0, 0) - A(t_0, 0)|}{\|(t - t_0, x)\|_2} = 0$$

gilt.

f ist in $(t_0, 0)$ partiell differenzierbar. Da der Funktionswert nicht von t abhängt ist $\frac{df}{dt}(t_0, t) = 0$ und

$$\frac{df}{dx}(t_0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(t_0, x) - f(t_0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\tfrac{1}{x^2}\right) = 0\,,$$

weil sin beschränkt ist.

Also ist die Nullabbildung der einzig mögliche Kanditat für A. Und tatsächlich gilt für (t,x) mit $x \neq 0$

$$0 \leq \frac{|f(t,x) - f(t_0,0) - 0|}{\|(t-t_0,x)\|_2} = \frac{\left|x^2 \sin(\frac{1}{x^2})\right|}{\sqrt{(t-t_0)^2 + x^2}} \leq \frac{|x|^2 \left|\sin(\frac{1}{x})\right|}{\sqrt{x^2}} = \leq |x| \to 0$$

für $(t,x) \to (t_0,0)$, also ist f auch auf $\mathbb{R} \times \{0\}$ total differenzierbar.

f nicht lokal Lipschitz-stetig: Wäre f lokal Lipschitz-stetig in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, so wäre f insbesondere lokal Lipschitz-stetig in $(0,0)$, d.h es gäbe $M > 0$, $r > 0$, sodass

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq M\,|x_1 - x_2| \tag{1}$$

für alle (t,x), $(t,x') \in \mathbb{R}^2$ mit $\max\{|t|, |x|, |x'|\} \leq r$.

Sei nun $t \in \mathbb{R}$ beliebig und für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$x_n := \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}}, \quad x'_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Sei $r > 0$ beliebig. Da $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = 0$ ein $N(r)$, sodass $\max |t|, |x_n|, |x'_n| \leq r$ für alle $n \geq N(r)$.

Nun gilt aber

$$\begin{aligned}
\frac{|f(t,x_1) - f(t,x_2)|}{|x_1 - x_2|} &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \cdot \frac{1}{\left|\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\right|} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \cdot \frac{\sqrt{2\pi n}\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}}{\left|\sqrt{2\pi n} - \sqrt{\frac{\pi}{2} 2\pi n}\right|} \\
&= \sqrt{\frac{2\pi n}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} \frac{\sqrt{2\pi n} + \sqrt{\frac{\pi}{2} 2\pi n}}{\left|(\sqrt{2\pi n} - \sqrt{\frac{\pi}{2} 2\pi n})(\sqrt{2\pi n} + \sqrt{\frac{\pi}{2} 2\pi n})\right|} = \sqrt{\frac{2\pi n}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} \frac{2}{\pi} \left|\sqrt{2\pi n} + \sqrt{\frac{\pi}{2} 2\pi n}\right| \\
&\geq \frac{2}{\pi} \left|\sqrt{2\pi n} + \sqrt{\frac{\pi}{2} 2\pi n}\right| \to \infty
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Also ist dieser Quotient auf jeder Umgebung von $(0,0)$ unbeschränkt und es kann kein Paar $(r,M) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ geben, sodass 1 für alle (t,x), $(t,x') \in \mathbb{R}^2$ mit $\max\{|t|, |x|, |x'|\} \leq r$ erfüllt ist. Also ist f nicht lokal Lipschitz-stetig.

b) Dies ist kein Widerspruch zu Lemma III.11, da dort gefordert wird, dass f *stetig differenzierbar* ist. Die Funktion f ist zwar total differenzierbar auf $\Omega = \mathbb{R}^2$, aber die Ableitung von f ist nicht stetig in $(0,0)$, wie man leicht nachrechnet (Grenzwert der partiellen Ableitung von f nach x für $x \to 0$, $x \neq 0$ betrachten).

Aufgabe 8.4 (optional)

Es seien $\Omega = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t^2 + x^2 < 1\}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t,x) = \sin\left(\frac{1}{1 - (t^2 + x^2)}\right).$$

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\forall\big(t, x(t)\big) \in \Omega : \quad \dot{x}(t) = f[t, x(t)], \quad x(0) = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass dieses Anfangswertproblem eine eindeutige maximale Lösung hat.

b) Es sei $u \in C^1(I,\mathbb{R})$ diese maximale Lösung. Zeigen Sie: Es existiert $t_0 \in \mathbb{R}^+$, sodass $I = (-t_0, t_0)$.

   Hinweis: Schauen Sie sich Aufgabe 7.3 an.

Lösungsskizze:

a) Zunächst ist Ω offen, nicht leer und konvex (Ω ist gerade die Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$) und es gilt $(0,0) \in \Omega$. Wegen $t^2 + x^2 < 1$ for alle $(t,x) \in \Omega$ existieren alle partiellen Ableitungen von f und sind stetig (beides nach Rechenregeln), also ist f stetig partiell differenzierbar und damit auch stetig differenzierbar. Also ist f nach Lemma III.11 lokal Lipschitz-stetig in Ω. Da f außerdem stetig auf Ω ist, sind alle Voraussetzungen von Satz III.9 erfüllt und damit hat das AWP eine eindeutige, maximale Lösung.

b) Sei $u \in C^1(I, \mathbb{R})$ diese maximale Lösung. Da u maximale Lösung ist, also insbesondere $0 \in I$ und $(t, u(t)) \in \Omega$ für alle $t \in I$, ist $t^2 < 1$ für alle $t \in I$, also $0 \in I = (a, b)$ mit a, $b \in (-1, 1)$. Also gilt sogar $-1 < a < 0 < b < 1$.

Annahme: I nicht symmetrisch um den Nullpunkt. Dann gilt entweder $a > -b$ oder $a < -b$.

Sei $a > -b$. Dann ist $(a, -a) \subseteq I$. Definiere nun $z : (-b, -a) \to \mathbb{R}$ via $z(t) = -u(-t)$. Das ist wohldefiniert und nach Rechenregeln in $C^{(}(-b, -a), \mathbb{R})$. Weiter ist $z(0) = -u(-0) = -u(0) = 0$ und da u die Differentialgleichung erfüllt gilt für $t \in (-b, -a)$

$$\dot{z}(t) = -(-\dot{u}(-t)) = \dot{u}(-t) = \frac{1}{1 - ((-t)^2 + u(-t)^2)} = \frac{1}{1 - (t^2 + z(t)^2)} .$$

Also löst auf $(a, -a) \subset I$ auch z unser Anfangswertproblem. Da u nach Satz III.9 eindeutige Lösung ist folgt $u(t) = z(t)$ für alle $t \in (a, -a)$.

Wir definieren nun $\tilde{z} : (-b, b) \to \mathbb{R}$ abschnittsweise durch

$$\tilde{z}(t) := \begin{cases} z(t) , & t \in (-b, -a) \\ u(t) , & t \in [-a, b) \end{cases} .$$

Nach Konstruktion ist $\tilde{z} \in C^1(-b, b)$, weiter ist $\tilde{z}(0) = 0$ und $\dot{\tilde{z}} = f(t, \tilde{z}(t))$, im Widerspruch zur Maximalität von u.

Analog für den Fall $a < -b$.