Technische Universität Braunschweig

Prof. U. Motschmann
Institut für Theoretische Physik

Christian Nabert
Institut für Geophysik und extraterrestrische Physik

Übungen zur Vorlesung: "Plasmaphysik"

Blatt 8 **Wintersemester 2014**

Besprechung: 10. Dezember 2014

Aufgabe 13: Wiederholung zur Funktionentheorie

Im Folgenden sollen einige wichtige Resultate der Funktionentheorie wiederholt werden. Diese werden bei der Herleitung der Landau-Dämpfung benötigt.

a) Die komplexe Ebene ist nichts anderes als ein zweidimensionaler reeller Vektorraum ($z \to (x, y)$). Zeigen Sie zunächst, dass für eine komplex differenzierbare Funktion $f(z)$ auf U, d.h.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, h \in \mathbb{C} \tag{1}$$

existiert für alle $z_0 \in U$, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten:

$$\partial_x u(x, y) = \partial_y v(x, y) \tag{2}$$

$$\partial_y u(x, y) = -\partial_x v(x, y) \tag{3}$$

mit $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ erfüllt.

b) Die komplexe Integration ist analog zu einem Linienintegral im $\mathbb{R}^2$ definiert. Zeigen Sie mit Aufgabenteil (a), dass

$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{4}$$

für eine komplex differenzierbare Funktion $f(z)$ (auch holomorph genannt) gilt.

c) Berechnen Sie das Integral

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz\ . \tag{5}$$

Hierbei ist $z, z_0 \in \mathbb{C}$ und C ein geschlossener Kreis um z_0.

d) Der Residuensatz besagt, dass das Integral einer geschlossenen Kurve einer Funktion $f(z)$ die Summe der Residuen ist:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{N} Res[f(z), z_k] \tag{6}$$

Entwickeln Sie die Funktion $f(z)$ in eine Laurent-Reihe und nehmen Sie C als Kreiskontur an. Bestimmen Sie, welchem Term der Laurent-Reihne $Res[f(z), z_k]$ entspricht.

e) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Folgende reelle Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \tag{7}$$