



27. **Kontinuitätsgleichung**

(3 Punkte)

Gegeben sei eine stationäre Ladungsdichte $\rho \neq \rho(t)$. Welche Form kann dann die Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}, t)$ haben, wenn (i) $\underline{j}(\underline{r}, t)$ überall dieselbe Richtung hat; (ii) $\underline{j}(\underline{r}, t)$ ein radiales Feld ist (d.h., $\underline{j}(\underline{r}, t) \sim \underline{e}_r$)?

28. **Homogene Wellengleichung**

(5 Punkte)

Es sei $\Phi(\underline{r}, t)$ eine skalare Funktion, die der homogenen Wellengleichung

$$\Delta \Phi(\underline{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(\underline{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

genügt.

- (a) Zeigen Sie, daß die Wellengleichung für Φ nicht forminvariant unter der Galilei-Transformation ist. Welche zusätzlichen Terme treten auf?
- (b) Zeigen Sie durch direktes Einsetzen in die Wellengleichung, daß Kugelwellen $\Phi(\underline{r}, t) \sim \exp(i(kr - \omega t))/r$ Lösungen der homogenen Wellengleichung sind.
- (c) Zeigen Sie, daß $\Phi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ eine Lösung der homogenen, eindimensionalen Wellengleichung ist, wenn f, g beliebige, zweimal differenzierbare Funktionen sind. Diskutieren Sie die Zeitabhängigkeit von Lösungen der Form $f(x, t) = \exp(-\gamma(x - ct)^2)$; $g \equiv 0$; $\gamma = \text{const} > 0$. Skizzieren Sie $f(x, t_0)$ für verschiedene Zeiten t_0 .

29. **Drehimpulsdichte des elektromagnetischen Feldes**

(10 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist es, für eine gegebene Verteilung von Ladungen ρ und Strömen $\underline{j}$ im Vakuum die Drehimpulserhaltung nachzuweisen und einen Ausdruck für die Drehimpulsdichte $\underline{L}$ des elektromagnetischen Feldes abzuleiten.

- (a) Zeigen Sie, daß sich die zeitliche Ableitung der i -ten Komponente des mechanischen Drehimpulses

$$\frac{d\mathcal{L}_{\text{mech}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V dV \mathcal{L}_{\text{mech}} = \int_V dV \underline{r} \times (\rho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B})$$

schreiben läßt als:

$$\frac{d}{dt} \int_V dV [\mathcal{L}_{\text{mech}} + \underline{L}]_i = \int_V dV \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \Sigma_{kl}}{\partial x_l} \quad . \quad (1)$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{L}_{\text{mech}}$ den mechanischen Drehimpuls. Die mechanische Drehimpulsdichte wird als $\underline{L}_{\text{mech}}$ bezeichnet. Der Maxwellsche Spannungstensor Σ_{ij} ist durch

$$\Sigma_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(\epsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \underline{B}^2 \right)$$

gegeben. Geben Sie mit Hilfe von Gl. (1) die Drehimpulsdichte des elektromagnetischen Feldes $\underline{L}$ an.
Hinweis: Beweisen Sie zunächst die überaus nützliche Beziehung

$$[\underline{E}(\nabla \cdot \underline{E}) - \underline{E} \times (\nabla \times \underline{E})]_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\beta} (E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{E} \delta_{\alpha\beta}) \quad .$$

- (b) Um den Fluß der Drehmomentdichte zu bestimmen, muß die rechte Seite von Gleichung (1) als Volumenintegral über eine Divergenz geschrieben werden. Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Teil (a), um die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_V dV [\mathcal{L}_{\text{mech}} + \underline{L}]_i = \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \underline{M}$$

herzuleiten. Was erhalten Sie für $\underline{M}$? Interpretieren Sie Ihr Resultat.

30. Energietransport in einem uniaxialen Dielektrikum

(12 Punkte)

Betrachten Sie ein ungeladenes, isolierendes Dielektrikum mit $\underline{\mu} = \underline{1}$ und dem Dielektrizitätstensor

$$\underline{\epsilon} = \epsilon_1 \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (2)$$

Mit ϵ_1 wird eine Konstante bezeichnet.

- (a) Zeigen Sie, daß es sich um einen uniaxialen Kristall handelt.

Hinweis: Bestimmen Sie das Hauptachsensystem von $\underline{\epsilon}$ und zeigen Sie, daß es einen zweifach entarteten Eigenwert gibt. Geben Sie explizit die Transformation an, die $\underline{\epsilon}$ auf Diagonalfom bringt.

- (b) Zeigen Sie, daß die Flächen konstanter Energiedichte in Abwesenheit von Magnetfeldern Rotationsellipsoide im $\underline{E}$ -Raum sind (*Fresnel-Ellipsoide*). Geben Sie die Halbachsen an. Zeigen Sie außerdem, daß die dielektrische Verschiebung $\underline{D}$ bei gegebenem $\underline{E}$ senkrecht auf der Oberfläche des zugehörigen Fresnel-Ellipsoiden steht.

- (c) Wir betrachten nun die Ausbreitung ebener Wellen, d.h. es gilt $\underline{D}, \underline{H}, \underline{E}, \underline{B} \sim \exp(i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t))$. Zeigen Sie, daß der Energietransport im allgemeinen, das heißt für beliebige Eigenwerte von $\underline{\epsilon}$, nicht in Ausbreitungsrichtung erfolgt. Leiten Sie zunächst aus den Maxwell-Gleichungen ab, daß $\underline{H} \cdot \underline{D} = 0$ und $\underline{H} \cdot \underline{E} = 0$ gilt und folgern Sie daraus, daß $\underline{\Pi} \nparallel \underline{k}$ ist ($\underline{\Pi}$ ist der Poynting-Vektor). Geben Sie eine Gleichung für den Winkel zwischen $\underline{k}$ und $\underline{\Pi}$ an.

Hinweis: Bestimmen Sie $\underline{D} \cdot \underline{E}$ und $\underline{k} \cdot \underline{\Pi}$ für ebene Wellen aus den Maxwellschen Gleichungen. Zudem könnte die Beziehung $\underline{k} \times (\underline{k} \times \underline{E}) = -|\underline{k}|^2 \underline{E} + (\underline{k} \cdot \underline{E}) \underline{k}$ hilfreich sein (Beweis!).

- (d) (*Bearbeitung freiwillig; + 8 Zusatzpunkte*)

Im folgenden diskutieren wir die Ausbreitung ebener Wellen $\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$ in dem Dielektrikum mit $\underline{\epsilon}$ aus Gleichung (2).

- i. Wie lauten die Maxwell-Gleichungen für diesen Fall? Leiten Sie die folgende Gleichung für $\underline{E}$ ab, ohne ein spezielles Koordinatensystem zu wählen:

$$-|\underline{k}|^2 \underline{E} + (\underline{k} \cdot \underline{E}) \underline{k} = -\frac{\omega^2}{c^2} \underline{\epsilon} \cdot \underline{E} . \quad (3)$$

c ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Bestimmen Sie die Dispersionsrelation $\omega(|\underline{k}|)$ für ebene Wellen, die sich

- parallel zur Symmetrieachse (z -Achse) des Kristalls ausbreiten ($\underline{E} = \underline{E}_0 \exp(i(kz - \omega t))$).
- mit $\underline{E} = (E_{0,x} \underline{e}_x + E_{0,z} \underline{e}_z) \exp(i(ky - \omega t))$ senkrecht zur z -Achse ausbreiten.
- mit beliebigem $\underline{E}_0$ und $\underline{k}$ im Kristall ausbreiten ($\underline{E} = \underline{E}_0 \exp(i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t))$). Wie viele propagierende Moden gibt es? Welchen Winkel bilden $\underline{k}$ und $\underline{E}$ jeweils und wie ist die Welle polarisiert?

- ii. Wie bestimmt man bei bekanntem $\underline{E}$ das Magnetfeld $\underline{H}$?

Hinweis: Verwenden Sie das Hauptachsensystem von $\underline{\epsilon}$ als Koordinatensystem.

31. Vektoranalysis

(*Bearbeitung freiwillig, + 2 Zusatzpunkte*)

Im Abschnitt 6.2 der Vorlesung (*Bilanz des elektromagnetischen Impulses*) wurden folgendes Hilfsmittel aus der Vektoranalysis verwendet: Es gelte $\underline{D} = \epsilon_0 \underline{\epsilon} \cdot \underline{E}$ und $\underline{H} = \kappa_0 \underline{\kappa} \cdot \underline{B}$. Die Materialtensoren $\underline{\epsilon}$ und $\underline{\kappa}$ werden als symmetrisch und als ortsunabhängig angenommen (homogenes Medium). Dann ist

$$[\underline{D} \times \text{rot } \underline{E}]_a = \frac{\partial}{\partial x_c} \left(\frac{1}{2} \underline{D} \cdot \underline{E} \delta_{ac} - D_c E_a \right) + E_a \text{div } \underline{D} \quad (4)$$

sowie

$$-[\text{rot } \underline{H} \times \underline{B}]_a = \frac{\partial}{\partial x_c} \left(\frac{1}{2} \underline{H} \cdot \underline{B} \delta_{ac} - B_c H_a \right) + H_a \text{div } \underline{B} . \quad (5)$$

Diese Beziehungen stellen eine Verallgemeinerung der in Aufgabe 29(a) angegebenen Identität dar. Rechnen Sie die Gln. (4) und (5) unter Verwendung von Komponentenschreibweise und Summenkonvention explizit nach.