Übungsblatt 7

Abgabe: Mittwoch, 5. Dezember 2012, vor der Vorlesung (bis 7.55 h)

Aufgabe 7.1 (10 Punkte)

Lösen Sie mit Hilfe der Picard-Iteration das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \quad x(0) = 0\,.$$

mit $f : [-2, 2] \times [-1, 1] \to [-1, 1]$, $f(x, t) = \frac{1}{2}(x + 1)$. Wo garantiert Satz III.8 die Existenz und die Eindeutigkeit dieser Lösung?

Lösungsskizze: Siehe Übung.

Aufgabe 7.2 (10 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t, x) = \begin{cases} 2t\,, & \text{für } x < 0 \\ 2t - 4\frac{x}{t}\,, & \text{für } 0 \le x < t^2 \\ -2t\,, & \text{für } x \ge t^2 \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist

b) Zeigen Sie, dass $x(t) := \frac{1}{3}t^2$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = f(t, x)\,, \quad x(0) = 0$$

ist.

c) Zeigen Sie, dass die Folge aus der Picard-Iteration nicht gegen eine Lösung des Anfangswertproblems konvergiert.

d) Wieso ist das kein Widerspruch zu Satz III.8?

Lösungsskizze: Siehe Übung.

Aufgabe 7.3 (optional)

Es seien $I = [-a, a]$, $J = [-b, b]$, $f : I \times J \to J$ stetig und global Lipschitzstetig auf $I \times J$ und $x : I \to J$ sei eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f[t, x(t)]$.
Zeigen Sie: Gilt $f[-t, x] = -f[t, x]$ für alle $(t, x) \in I \times J$, dann existiert ein $r > 0$, sodass $x(-t) = x(t)$ für alle $t \in [-r, r]$ gilt.

Lösungsskizze: Es seien x eine Lösung des Anfangswertproblems:

$$x^{\cdot}(t) = f[t, x(t)], \quad x(0) = x_0,$$

und $y(t) := x(-t)$. Dann ist

$$y^{\cdot}(t) = -x^{\cdot}(-t) = -f[-t, x(t)] = f[t, x(t)],$$

da $f(-t, x) = -f(t, x)$ ist. Außerdem gilt $y(0) = x(-0) = x(0) = x_0$. Also löst auch $y(t)$ das Anfangswertproblem. Da $f : I \times J \longrightarrow J$ stetig und global Lipschitzstetig auf $I \times J$ ist, existiert nach Satz III.8 $r > 0$, so dass die Lösung des Anfangswertproblems auf $[-r; r]$ eindeutig ist, d.h.,

$$x(t) = y(t) = x(-t).$$

Aufgabe 7.4 (optional)

Sei $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ gegeben durch $f(t, x) = t^2 + tx(t)^2$. Berechnen Sie die ersten vier Picard-Iterierten $x_{(n)}$, $n = 0, ...3$ zu dem Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(t, x)\,, \quad x(0) = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass die Folge der Picard-Iterierten auf $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ gleichmäßig konvergiert. Was läßt sich über den Grenzwert sagen? Welchen Fehler machen Sie bei $x_{(3)}$ höchstens?

Lösungsskizze:

a) Mit der Picard-Iteration aus der Vorlesung bekommen wir:

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= 0,\\
x_1(t) &= x_0 + \int_0^t f[s, x_0(s)]\ ds = \int_0^t s^2\ ds = \frac{1}{3}t^3,\\
x_2(t) &= x_0 + \int_0^t f[s, x_1(s)]\ ds\\
&= \int_0^t s^2 + s \cdot \frac{1}{9}s^6 ds = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{72}t^8,\\
x_3(t) &= x_0 + \int_0^t f[s, x_2(s)]\ ds = \int_0^t s^2 + s \cdot (\frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{72}s^8)^2\ ds\\
&= \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{72}t^8 + \frac{1}{1404}t^{13} + \frac{1}{93312}t^{18}.
\end{aligned}$$

b), c) Wir wollen hier Satz III.8 verwenden. Dafür rechnen wir zuerst Lipschitzstetigkeit von f auf $I \times J$ nach. Wir haben

$$\begin{aligned}
|f(t, x_1) - f(t, x_2)| &= \left|t^2 + tx_1 - t^2 - tx_2\right|\\
&= |t| \left|x_1^2 - x_2^2\right|\\
&= |t| |x_1 - x_2| |x_1 + x_2| \leq \frac{1}{2} |x_1 - x_2|.
\end{aligned}$$

Also ist f auf $I \times J$ global Lipschitzstetig mit globaler Lipschitz- Konstante $M := \frac{1}{2} < \infty$. Als nächstes ist

$$\begin{aligned}
\tilde{M} &:= \max\left\{|f(t,x)| \middle| (t,x) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\right\}\\
&= \max\left\{\left|t^2 + tx^2\right| \middle| (t,x) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\right\}\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

und $\tilde{a} := \frac{1}{2}\ \min\left\{a, \frac{1}{M}, \frac{1}{\tilde{M}}\right\} = \frac{1}{4}$. Nach Satz III.8 hat das Anfangswertproblems auf $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ eine eindeutige Lösung und diese ist der Grenzwert $\tilde{x}(t)$ der Folge der Picard-Iterierten. Die Konvergenz ist sogar gleichmäßig.

d) Nach der Fehlerabschätzung aus der Vorlesung, Gleichung III.50, gilt

$$\begin{aligned}
\max_{t \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})} |x_*(t) - x_3(t)| &\leq \frac{(\tilde{a}\, M)^3}{1 - \tilde{a}\ M} \max_{t \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})} \left|\int_{t_0}^t f(s, x_0) ds\right|\\
&\leq \frac{\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right)^3}{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} \max_{t \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})} \left|\int_{t_0}^t s^2 ds\right|\\
&= \frac{1}{86016}
\end{aligned}$$
