Übungsblatt 6

Abgabe: Mittwoch, 28. November 2012, vor der Vorlesung (bis 7.55 h)

Aufgabe 6.1 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Abbildung $g : C[0,1] \to C[0,1]$, die durch

$$g(x)(t) := \int_0^1 \cos(tx(s))ds$$

gegegeben ist, einen Fixpunkt besitzt.

Hinweis: Schränken Sie g auf eine geeignete Teilmenge ein.

Lösungsskizze: Wir betrachten $C[0,1]$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$.
Um die Behauptung zu zeigen, genügt es nach dem Banachschen Fixpunktsatz eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge $D \subseteq C[0,1]$ zu finden, sodass $g(D) \subseteq D$ gilt und daass $T : D \to D$ mit $T(x) := g(x)$ Lipschitzstetig mit Lipschitz-Konstanter < 1 ist.

Sei $D := \{x \in C[0,1] \mid x([0,1]) \subseteq [0,1]\}$. Wegen $x \equiv \frac{1}{2} \in D$ ist $D \neq \emptyset$.

Weiter ist D abgeschlossen: Sei $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ und $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.
Wegen $\|x_n - x\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x(t)|$ konvergiert dann x_n auch punktweise gegen x, also $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ für alle $t \in [0,1]$. Wegen $0 \leq x_n(t) \leq 1$ für alle $t \in [0,1]$ ist dann auch $0 \leq x(t) \leq 1$ für alle $t \in [0,1]$.

Nun zeigen wir $g(D) \subseteq D$: Sei $x \in D$ und $t \in [0,1]$. Dann ist auch $tx(s) \in [0,1]$ für alle $s \in [0,1]$ und wegen $0 < 1 < \pi/2$ ist $\cos(tx(s)) \in [0,1]$ für alle $s \in [0,1]$, also

$$0 \leq g(x)(t) = \int_0^1 \cos(tx(s))ds \leq \int_0^1 ds = 1\,.$$

Damit haben wir $g(D) \subseteq D$ gezeigt. Betrachte nun $T : D \to D$ mit $T(x) := g(x)$ und $x_1, x_2 \in D$ beliebig.
Dann gilt für $t \in [0,1]$ beliebig

$$|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| \leq \int_0^1 |\cos(tx_1(s)) - \cos(tx_2(s))|\, ds\,.$$

Nach dem MWS der Differentialrechnung existiert für jedes $s \in [0,1]$ ein $\xi_s \in (tx_1(s), tx_2(s) \subseteq (0,1)$, sodass

$$|\cos(tx_1(s)) - \cos(tx_2(s))| \leq |\sin(\xi_s)|\,|t|\,|x_1(s) - x_2(s)|$$

und da sin auf $[0, \pi/2]$ monoton wachsend und nichtnegativ ist, ist $|\sin(\xi_s)| \leq \sin(1)$ für alle $s \in [0,1]$.
Zusammengefasst erhalten wir

$$|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| \leq \sin(1) \int_0^1 |x_1(s) - x_2(s)|\, ds \leq \sin(1)\|x_1 - x_2\|_\infty$$

für alle $t \in [0,1]$, also

$$\|Tx_1 - Tx_2\|_\infty \leq \sin(1)\|x_1 - x_2\|_\infty\,.$$

Somit ist $L := \sin(1) < 1$ eine Lipschitz-Konstante von T, und T ist kontrahierend.
Daher hat die Gleichung $x = Tx = g(x)$ nach dem Banachschen Fixpunktsatz eine Lösung $x \in D \subseteq C[0,1]$.

Aufgabe 6.2 (10 Punkte)

Es sei $0 < T < 2$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\forall t \in [0,T] : \quad x(t) = \frac{1}{2}t^2 + \int_0^t sx(s)ds$$

eine eindeutig bestimmte Lösung in $C([0,T]; \mathbb{R})$ hat.
Bestimmen Sie diese Lösung

a) durch Zurückführen auf ein Anfangswertproblem und

b) mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes.

Lösungsskizze: Siehe Übungsmitschrift.

Aufgabe 6.3 (optional)

Sind die folgenden Abbildungen lokal bzw. global Lipschitz-stetig?

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(t,x) = \sqrt{|x|}$

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(t,x) = -x^2$

c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(t,x) = \sin(t)x$

Lösungsskizze:

a) $\sqrt{|x|}$ ist auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nicht lokal und damit auch nicht global Lipschitz-stetig:

Angenommen, f wäre lokal Lipschitz-stetig. Dann existierten zu $(t_0, x_0) = (0,0)$ Konstanten $M_{0,0}$, $r_{0,0} > 0$, sodass für alle (t, x_1), $(t, x_2) \in \mathbb{R}$ mit $\max(|t|, |x_1|, |x_2|) \leq r_{0,0}$ gilt:

$$\left|\sqrt{|x_1|} - \sqrt{|x_2|}\right| \leq M_{0,0} |x_1 - x_2| \ .$$

Nun existiert aber ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{n^2} \leq r_{0,0}$ für alle $n \geq n_0$.
Somit würde für $t = 0$, $x_2 = 0$ und $x_1 = \frac{1}{n^2}$ mit $n \geq n_0$ beliebig gelten, dass $\max(|t|, |x_1|, |x_2|) \leq r_{0,0}$, und folglich

$$\frac{1}{n} = \left|\sqrt{\left|\frac{1}{n^2}\right|} - \sqrt{|0|}\right| \leq M_{0,0} \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = M_{0,0} \frac{1}{n^2} \ .$$

Da $n \geq n_0$ beliebig war, würde daraus folgen, dass

$$n = \frac{n^2}{n} \leq M_{0,0}$$

für alle $n \geq n_0$, im Widerspruch zu Unbeschränktheit von $\mathbb{N}$.

b) $f(t,x) = -x^2$ ist auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lokal, aber nicht global Lipschitz-stetig und damit auch nicht Lipschitz-stetig im Banachraumsinne:

Zunächst eine Vorüberlegung, die wir für beide Beweisteile brauchen: Für t,x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ beliebig gilt

$$|g(t,x_1) - g(t,x_2)| = \left|x_2^2 - x_1^2\right| = |x_2 + x_1| \, |x_2 - x_1| = |x_1 + x_2| \, |x_1 - x_2| \ .$$

Wir zeigen nun, dass g lokal Lipschitz-stetig ist. Sei $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ beliebig und sei $R > 0$ beliebig. Dann gilt für alle (t, x_1), (t, x_2) mit $\max(|t - t_0|, |x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|) < R$, dass

$$\begin{aligned} |g(t,x_1) - g(t,x_2)| &= |x_1 + x_2| \, |x_1 - x_2| \leq (|x_1 - x_0| + |x_2 - x_0| + 2|x_0|) \, |x_1 - x_2| \\ &\leq (2R + 2|x_0|) \, |x_1 - x_2| \ . \end{aligned}$$

Mit $r_{t_0,x_0} := 1$ und $M_{0,0} := 2(1 + |x_0|)$ haben wir also zwei Konstanten wie gewünscht gefunden.

Nun zeigen wir, dass g nicht global Lipschitz-stetig ist:

Für $x_1 \neq x_2$ gilt nach unserer Vorbetrachtung $|g(t,x_1) - g(t,x_2| \leq M |x_1 - x_2|$ genau dann, wenn $|x_1 + x_2| \leq M$. Da aber zum Beispiel $|n + n| \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt, kann es kein $M > 0$ geben, für das dies für alle x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

c) h ist global und damit auch lokal Lipschitz-stetig, aber nicht Lipschitz-stetig im Banachraum-Sinne:

Seien t, x_1 und $x_2 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist

$$|h(t,x_1) - h(t,x_2)| = |\sin(t)(x_1 - x_2)| \leq |\sin(t)| \, |x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2| \ .$$

Also ist h global Lipschitz-stetig mit globaler Lipschitz-Konstante 1.

Zur Wiederlegung der Lipschitzstetigkeit betrachte die Folgen $((t_n, x_n))_n, ((\tilde{t_n}, \tilde{x_n}))_n \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ mit $(t_n, x_n) = (2\pi n, n+1)$ und $(\tilde{t}, \tilde{x}) = (2\pi n + \pi/2, n)$. Dann gilt bzgl. der Maximumsnorm

$$\|(t_n, x_n) - (\tilde{t}_n, \tilde{x}_n)\|_\infty = \|(-\pi/2, 1)\|_\infty = \pi/2 \,.$$

Aber

$$\left|h(t_n, x_n) - h(\tilde{t}_n, \tilde{x}_n)\right| = |\sin(2\pi n)(n+1) - \sin(2\pi n + \pi/2)n| = n \to \infty \,.$$

Aufgabe 6.4 (optional)

Seien X, Y, Z Banachräume, und $T : D \subseteq X \to Y$ und $S : T(D) \subseteq Y \to Z$ Lipschitz-stetig.

a) Zeigen Sie, dass $\|T\|_D$ wohldefiniert und tatsächlich die kleinste Lipschitz-Konstante für T ist.

b) Zeigen Sie, dass auch $S \circ T : D \subseteq X \to Z$ Lipschitz-stetig ist.

c) Konstruieren Sie Lipschitz-stetige Abbildungen f, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ so, dass $\|f\|_{\mathbb{R}^2}$, $\|g\|_{\mathbb{R}^2} > 1$, aber $\|g \circ f\|_{\mathbb{R}^2} < 1$ gilt.

Lösungsskizze:

a) Sei L eine Lipschitz-Konstante von f. Dann gilt für alle$x_1 \neq x_2$, x_1, $x_2 \in D$

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y \leq L\|x_1 - x_2\|_X$$

und folglich

$$\frac{\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y}{\|x_1 - x_2\|_X} \leq L$$

gilt. Somit ist die Menge

$$\left\{\frac{\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y}{\|x_1 - x_2\|_X} \mid x_1 \neq x_2 \,, x_2, x_2 \in D\right\}$$

durch L nach oben beschränkt, und es gilt

$$\|T\|_D = \sup\left\{\frac{\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y}{\|x_1 - x_2\|_X} \mid x_1 \neq x_2 \,, x_2, x_2 \in D\right\} \leq L \in \mathbb{R} \,,$$

also ist $\|T\|_D$ wohldefiniert und außerdem eine untere Schranke für die Menge aller Lipschitz-Konstanten.

Bleibt zu zeigen dass $\|T\|_D$ selbst eine Lipschitz-Konstante ist: Seien x_1, $x_2 \in D$. Für $x_1 = x_2$ ist die Abschätzung immer erfüllt, also genügt es $x_1 \neq x_2$ zu betrachten.

Dann ist nach Definition des Supremums

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y = \frac{\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y}{\|x_1 - x_2\|_X}\|x_1 - x_2\|_X \leq \|T\|_D\|x_1 - x_2\|_X \,.$$

b) Seien L_S und L_T Lipschitzkonstanten zu S bzw. T und x_1, $x_2 \in D$ beliebig.

Dann ist

$$\|(S\circ T)(x_1) - (S\circ T)(x_2)\|_Z = \|S(T(x_1)) - S(T(x_2))\|_Z \leq L_S\|T(x_1) - T(x_2)\|_Y \leq L_S L_T\|x_1 - x_2\|_X \,.$$

c) Setze $f(x, y) := (2x, 0)^T$ und $g(x, y) := (0, 5y)^T$. Dann ist

$$\|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|_2 = |2(x_1 - x_2)| \leq 2\|(x_1, y_1)^T - (x_2, y_2)^T\| \,,$$

also ist f lipschitzstetig, und $\|f(1,0) - f(2,0)\|_2 = 2 = 2\|(1,0)^T - (2,0)^T\|$, also ist $\|f\|_{\mathbb{R}^1} = 2$.

Analog zeigt man, dass $\|g\|_{\mathbb{R}^2} = 5$.

Andereseits ist $g \circ f \equiv 0$, also $\|g \circ f\|_{\mathbb{R}^2} = 0$.
