



21. **Homogen geladener Draht**

(10 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung des elektrischen Feldes und des Potentials eines infinitesimal dünnen, geraden Drahtes.

- (a) Betrachten Sie einen unendlich langen Draht, der die homogene Linienladungsdichte λ (Ladung pro Länge) trägt. Geben Sie für diese Situation zunächst die Ladungsdichte $\rho(\underline{r})$ an. Zeigen Sie, daß das Poisson-Integral

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

divergiert, daß jedoch das elektrische Feld $\underline{E} = -\nabla\Phi$ mit Hilfe des Poisson-Integrals berechnet werden kann. Warum ist das Poisson-Integral hier zumindest für Φ nicht anwendbar?

- (b) Überprüfen Sie das in Teilaufgabe (a) ermittelte Ergebnis für $\underline{E}$ mit Hilfe der integralen Form des Gaußschen Gesetzes.
- (c) Zeigen Sie, daß sich die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ für die Situation aus Teilaufgabe (a) auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung reduziert und lösen Sie diese allgemein.
- (d) Betrachten Sie jetzt einen geraden, infinitesimal dünnen Draht endlicher Länge L . Der Draht trage wiederum die homogene Linienladungsdichte λ . Bestimmen Sie das Potential $\Phi(\underline{r})$.

22. **Legendre-Polynome IV: Faradayscher Käfig**

(10 Punkte)

Als Anwendung der in Aufgabe 17 eingeführten Legendre-Polynome betrachten wir eine leitende Kugelschale mit Radius R in einem statischen elektrischen Feld, das in größerer Entfernung von der Kugelschale homogen ist. Zum Beispiel könnte so ein Feld von einem Plattenkondensator erzeugt worden sein. Der Koordinatenursprung soll im Mittelpunkt der Kugelschale liegen.

Es handelt sich um ein zylindersymmetrisches Problem. Die Lösung $\Phi(\underline{r})$ der Laplace-Gleichung muß sich daher sowohl innerhalb als auch außerhalb der Kugelschale in der Form

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{U_l(r)}{r} P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

schreiben lassen (vgl. Aufgabe 17). Das Problem besteht jetzt in der Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten a_l, b_l aus den Randbedingungen. Die Entwicklungskoeffizienten a_l, b_l im Innenraum ($r < R$) unterscheiden sich natürlich von denen im Außenraum ($r > R$).

- (a) Auf der Oberfläche der Kugelschale gilt die Randbedingung $\Phi(r = R) = \Phi_0 = \text{const.}$ Bestimmen Sie zunächst die Entwicklungskoeffizienten und damit das Potential Φ im Innenraum ($r < R$). Wie lautet das zugehörige elektrische Feld?
- (b) Nun soll auch das Potential für den Außenraum der Kugelschale bestimmt werden. Aus der Stetigkeit von $\Phi(r, \theta)$ bei $r = R$ erhalten Sie eine erste Bedingung an die Koeffizienten a_l, b_l im Außenraum ($r > R$). Für große $|\underline{r}|$ sei $\underline{E} = \underline{E}_\infty = E_0 \underline{e}_z$. Geben Sie das zugehörige Potential $\Phi_\infty(r, \theta)$ an. Eine zweite Bedingung an die Koeffizienten erhalten Sie aus dem asymptotischen Verhalten von $\Phi(r, \theta)$: $\Phi(r, \theta) \rightarrow \Phi_\infty(r, \theta)$ für $r \gg R$. Beide Gleichungen sind vom Typ:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r_0^l + \frac{b_l}{r_0^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) = f(r_0, \theta) \quad . \quad (1)$$

Leiten Sie aus (1) Bestimmungsgleichungen für a_l und b_l ab. Es ist hilfreich (aber nicht verlangt), dies zunächst für eine beliebige Funktion $f(r_0, \theta)$ zu tun. Geben Sie das Potential $\Phi(r, \theta)$ im Außenraum der Kugelschale an.

Rückseite beachten! $\longrightarrow$

- (c) Diskutieren Sie den Verlauf der Feldlinien und der Äquipotentiallinien und skizzieren Sie diese.
- (d) Berechnen Sie die Oberflächenladungsdichte σ sowie die Gesamtladung Q auf der Kugelschale. Interpretieren Sie die Terme, die in $\Phi(r, \theta)$ auftreten. Geben Sie das Potential $\Phi_\sigma(r, \theta)$ der Oberflächenladungen für den Fall $Q = 0$ durch Vergleich mit Ihrem Ergebnis für $\Phi(r, \theta)$ für $r > R$ und $r < R$ an.

23. Legendre-Polynome V

(5 Punkte)

Wir betrachten zwei konzentrische Kugelschalen mit Radien $R_1 < R_2$. Bestimmen Sie die Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ im ganzen Raum, wenn die folgenden Randbedingungen gegeben sind:

$$\Phi(|\underline{r}| = R_1) = A \quad ; \quad \Phi(|\underline{r}| = R_2) = B \cos \theta \quad ; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r, \theta) = 0 \quad .$$

Mit A und B werden Konstanten bezeichnet. Verwenden Sie den Ansatz

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

mit den Legendre-Polynomen P_l . Stellen Sie Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten a_l, b_l auf und bestimmen Sie diese.

24. Separationsansatz in kartesischen Koordinaten II

(5 Punkte)

Lösen Sie die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ im Volumen

$$V = \{ \underline{r} = (x_1, x_2, x_3) \mid -a/2 \leq x_1 \leq a/2; -b/2 \leq x_2 \leq b/2; -\infty \leq x_3 \leq \infty \}$$

mit Hilfe eines Separationsansatzes unter den folgenden Randbedingungen:

$$\Phi(\pm \frac{a}{2}, x_2, x_3) = \Phi_0 = \text{const} \quad ; \quad \Phi(x_1, \pm \frac{b}{2}, x_3) = 0 \quad .$$