Übungsblatt 5

Abgabe: Mittwoch, 21. November 2012, vor der Vorlesung (bis 7.55 h)

Aufgabe 5.1 (10 Punkte)

Es sei das Anfangswertproblem

$$\forall t > 0 : \quad \dot{x}(t) = -3x(t) + e^t, \quad x(t_0) = x_0$$

gegegeben.

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung.

b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

Lösungsskizze: Siehe Übung.

Aufgabe 5.2 (10 Punkte)

Sei $\gamma > 0$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(\varphi, \omega) = (\omega, -\gamma \sin(\varphi))^T$$

Lipschitz-stetig ist und bestimmen Sie die Lipschitz-Konstante bezgl. der euklidschen Norm auf $\mathbb{R}^2$.

Lösungsskizze: Siehe Übung.

Aufgabe 5.3 (optional)

Bestimmen Sie auf passenden Intervallen I Lösungen der Differentialgleichung

$$\forall x \in I : \quad x\dot{(t)} = \frac{1}{1 + t - x(t)}$$

zu den Anfangswertbedingungen $x(0) = -1$ und $x(-1) = -1$.

Lösungsskizze: Zurückführung auf Trennung der Variablen: Substituiere mit

$$z(t) := 1 + t - x(t)\,.$$

Dann ist $x(t) = 1 + t - z(t)$ und durch Einsetzen unserer Differentialgleichung erhalten wir die neue DGL

$$\dot{z}(t) = 1 - \dot{x}(t) = 1 - \frac{1}{z(t)} = \frac{z(t) - 1}{z(t)}\,.$$

- Anfangsbedingung $x(0) = -1$: Wir erhalten die neue Anfangsbedingung $z(0) = 2$.
  Lösen das AWP mit TdV. Substitution mit $w = z - 1$, $dw = dz$ liefert

  $$G(z) := \int_2^z \frac{\tilde{z} d\tilde{z}}{\tilde{z} - 1} = \int_1^{z-1} \frac{w + 1}{w} = z + \ln|z - 1| - 2\,.$$

  Rücksubstitution überführt die Integralgleichung

  $$G(z) = \int_0^t ds = t$$

  in die Gleichung

  $$1 + t - x + \ln|t - x| = t + 2\,.$$

  Diese ist äquivalent zu

  $$|t - x| = e^{1+x}\,,$$

  also ist die Lösung unseres AWP in einer Umgebung von $t_0 = 0$ implizit durch die Gleichung

  $$t = x + e^{1+x}$$

  gegeben. Die Existenz einer Lösung dieser Gleichung und damit des AWP wird durch den Satz über implizite Funktionen garantiert.

- Anfangsbedingung $x(-1) = -1$ liefert $z(-1) = 1$. Da dies eine Nullstelle von $fracz(t) - 1z(t)$ ist, ist TdV nicht möglich (hier funktioniert das auch nicht formal).

  Einsetzen in die DGL liefert die Bedingung

  $$\dot{z}(-1) = 0\,.$$

  Versuchen den Ansatz $z \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$. Wegen $z(-1) = 1$ folgt die Bedingung $c = 1$.

  Rücksubstitution liefert $x(t) = t$ und eine (komplett aufgeschriebene) Probe zeigt, dass x unsere ursprüngliches Anfangswertproblem auf $I = \mathbb{R}$ löst.

Aufgabe 5.4 (optional)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = t^2 - t^2 \sin(x(t))^2\,, \quad x(0) = \frac{\pi}{4}$$

auf einem passenden Intervall.

Lösungsskizze: Für eine Lösung x des Anfangswertproblems gilt

$$\dot{x}(t) = t^2(1 - \sin(t)^2) = t^2 \cos(t)^2\,.$$

Es liegen getrennte Variablen vor. Wir bestimmen eine Lösung durch TdV mit $g(x) := \cos^2(x)$, $h(t) = t^2$:
Es gilt

$$G(x) := \int_{\pi/4}^{x} \frac{d\tilde{x}}{\cos^2(\tilde{x})} = \tan(x) - \tan(\pi/4) = \tan(x) - 1$$

und

$$H(x) = \int_0^t h(s)ds = \frac{1}{3}t^3\,.$$

Also wird die Integralgleichung $G(x) = H(t)$ von $x = \arctan(1 + \frac{1}{3}t^3)$ gelöst, sofern dieser Ausdruck wohldefiniert ist.
Dies ist für $x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi) =: J_k$, $k \in \mathbb{Z}$ der Fall.
Wegen $x(0) = \pi/4$ kommt nur $k = 0$ in Frage. Dammit haben wir $G(J_0) = \mathbb{R}$ also $\frac{1}{3}t^3 \in G(J)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x(t) := \arctan(1 + \frac{1}{3})$ ist nach TdV eindeutige Lösung des AWP auf $I := \mathbb{R}$.