Übungsblatt 4

Abgabe: Mittwoch, 14. November 2012, vor der Vorlesung (bis 7.55 h)

Aufgabe 4.1 (10 Punkte)

a) Zeichnen Sie das Richtungsfeld in $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ zur Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \frac{t}{x(t)}$$

und geben Sie deren Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = c$, $c > 0$ an.

b) Zeichnen Sie das Richtungsfeld in $D = \mathbb{R}^2$ zur Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = 1 + t - x(t)$$

und zeichnen Sie einige Lösungskurven ein.

Lösungsskizze: a) Grobe Skizze:

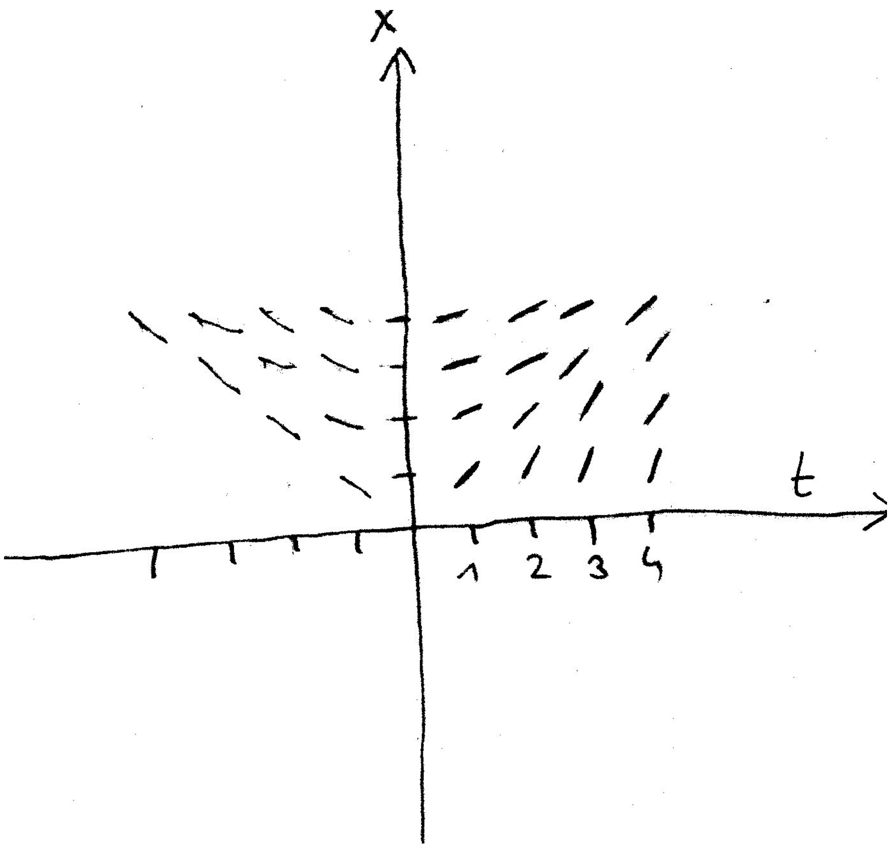

Figure 1: a)

Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = c > 0$ ist $x(t) = \sqrt{t^2 + c^2}$.

b)Grobe Skizze:

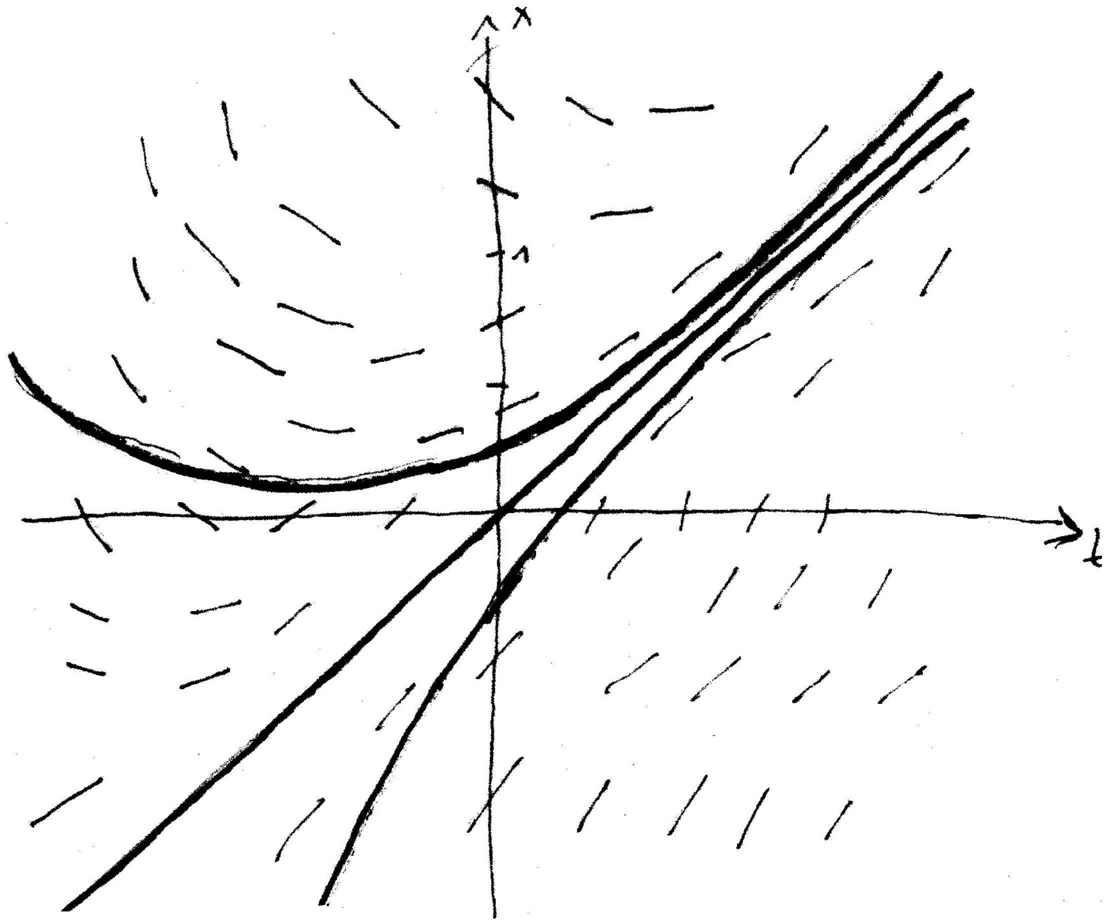

Figure 2: b)

Aufgabe 4.2 (10 Punkte)

Berechnen Sie durch Trennung der Variablen Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\dot{x} = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

wobei (t_0, x_0) ein beliebiger Punkt aus dem Definitionsbereich D von f ist.

a) $D = \mathbb{R}^2$, $f(t,x) = e^x \cos t$

b) $D = \mathbb{R} \times (-1,1)$, $f(t,x) = \sqrt{1-x^2}$

Bestimmen Sie jeweils das größte offene Intervall $I_* \subseteq \mathbb{R}$ auf dem diese Lösung nach Satz II.4 aus der Vorlesung eindeutig ist.

Lösungsskizze:

a) Wir setzen $h(t) := \cos(t)$ und $g(x)$. Dann benötigen wir zum Aufstellen der für TdV zu lösenden Integralgleichung die Integrale

$$G(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{g}(\tilde{x}) = \int_{x_0}^{x} e^{-\tilde{x}} d\tilde{x} = e^{-x_0} - e^{-x}$$

und

$$H(t) := \int_{t_0}^{t} f(t)dt = \sin(t) - \sin(t_0).$$

Wir berechnen zunächst I_*: Gesucht ist das größte Intervall I_*, sodass $H(t) \in G(\mathbb{R})$ für alle $t \in I_*$ und $t_0 \in I_*$.

Es gilt

$$G(\mathbb{R}) = \{e^{-x_0} - e^{-x} \mid x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, e^{-x_0}),$$

weil $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ ist. Also gilt für $t \in \mathbb{R}$:

$$H(t) \in G(\mathbb{R}) \Leftrightarrow H(t) = \sin(t) - \sin(t_0) < e^{-x_0} \Leftrightarrow \sin(t) < e^{-x_0} + \sin(t_0)\,,$$

also $I_* \subseteq \{t \in \mathbb{R} \mid \sin(t) < e^{-x_0} + \sin(t_0)\} = \sin^{-1}(-\infty, e^{-x_0} + \sin(t_0)) =: U$.
Ist $e^{-x_0} + \sin(t_0) > 1$, so ist $I^* = \mathbb{R}$, ansonste die größte Umgebung von $t_0 \in U$ (da $e^{-x_0} > 0$ ist $t_0 \in U$).
Nun noch die Lösung des AWP ausrechnen: Es gilt für $t \in I_*$

$$G(x) = F(t) \Leftrightarrow e^{-x} = e^{-x_0} + \sin(t_0) - \sin(t) \Leftrightarrow x = -\ln(e^{-x_0} + \sin(t_0) - \sin(t))\,,$$

da dann die rechte Seite der zweiten Gleichung positiv ist.
Also ist unsere Lösung die Funktion $x : I_* \to \mathbb{R}$ mit $x(t) = -\ln(e^{-x_0} + \sin(t_0) - \sin(t))$.

b) $D = \mathbb{R} \times (-1, 1)$, $f(t, x) = \sqrt{1 - x^2}$.
Setze $g(x) := \sqrt{1 - x^2}$, $h(t) = 1$. Dann ist

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{g}(\tilde{x}) = \int_{x_0}^{x} d\frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{x}^2}}\tilde{x} = \arcsin(xx) - \arcsin(x_0)$$

und

$$H(t) = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0\,.$$

Es gilt

$$G(-1, 1) = (-\pi/2 - \arcsin(x_0), \pi/2 - \arcsin(x_0))\,.$$

Dann ist

$$H(t) = t - t_0 \in G(-1, 1) \Leftrightarrow t \in (-\pi/2 - \arcsin(x_0) + t_0, \pi/2 - \arcsin(x_0) + t_0) =: I_*\,.$$

Wegen $t_0 \in I_*$ ist I_* tatsächlich das gesuchte Intervall.
Nun die Lösung berechnen: Da $x \in (-1, 1)$ gilt

$$G(x) = H(t) \Leftrightarrow \arcsin(x) = \arcsin(x_0) + t - t_0) \Leftrightarrow x = \sin(t + \arcsin(x_0) - t_0)\,,$$

also erhalten wir die Lösung $x : I_* \to \mathbb{R}$, $x(t) = \sin(t + \arcsin(x_0) - t_0)$.

Aufgabe 4.3 (optional)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\forall t \in I: \quad (t^2 - 1)\dot{x}(t) + 2tx(t) = tx(t)^2\,, \quad y(0) = 1$$

auf einem passenden Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Lösungsskizze: Sei $I := (-1, 1)$. Dann ist $t^2 - 1 \neq 0$ für alle $t \in I$ und das AWP

$$\forall t \in I: \quad (t^2 - 1)\dot{x}(t) + 2tx(t) = tx(t)^2\,, \quad x(0) = 1$$

ist genau dann erfüllt, wenn

$$\forall t \in I: \quad \dot{x}(t) = \frac{t}{t^2 - 1}(x(t)^2 - 2x(t))\,, \quad x(0) = 1\,.$$

Die neue Differenzialgleichung hat getrennte Variablen mit $h(t) := \frac{t}{t^2-1}$, $g(t) := x(t)^2 - 2x(t)$. Wegen $x(0) = 1$, $g(1) = -1 \neq 0$ ist TdV anwendbar. Mit Partialbruchzerlegung erhalten wir für $x \neq 0$

$$G(x) := \int_1^x \frac{dy}{g(y)} = \frac{1}{2}\left(\int_1^x \frac{1}{y - 2}dy - \int_1^x \frac{1}{y}dy\right) = \frac{1}{2}(\ln|x - 2| - \ln|x|) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x - 2}{x}\right|$$

und mit $z := s^2 - 1$, $dz = 2sds$ gilt

$$H(t) = \int_0^t \frac{s}{s^2 - 1}ds = \frac{1}{2}\int_{-1}^{t^2-1} \frac{1}{z}dz = \frac{\ln\left|t^2 - 1\right|}{2} = \frac{\ln(1 - t^2)}{2}\,.$$

Somit gilt $G(t) = H(t)$ genau dann, wenn $\left|\frac{x-2}{x}\right| = 1 - t^2$.
Für $\frac{x-2}{x} > 0$ erhalten wir den Widerspruch $x = \frac{2}{t^2} > 0$ für $t \neq 0$ (außerdem bei $t = 0$ nicht wohldefiniert).
Für $\frac{x-2}{x} < 0$ erhalten wir $x = \frac{2}{2-t^2}$.
Da die Gleichung für alle $t \in I$ lösbar ist und $0 \in I$ ist $x : I \to \mathbb{R}$, $x(t) := \frac{2}{2-t^2}$ nach Satz III.4 eine Lösung des AWP.

Aufgabe 4.4 (optional)

Es sei $0 < \beta < \alpha$. Bestimmen Sie alle konstanten Lösungen und eine nichtkonstante Lösung der Differentialgleichung

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \dot{x}(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)^2 \,.$$

Lösungsskizze: Wir suchen zunächst alle konstanten Lösungen: Da eine reelle Funktion genau dann konstant ist, wenn ihre Ableitung verschwindet liefert unsere Differentialgleichung

$$x \equiv c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 0 = \alpha c - \beta c^2 = c(\alpha - \beta c) \Leftrightarrow c = 0 \text{ oder } c = \frac{\alpha}{\beta}\,.$$

Nun zur Berechnung einer nichtkonstanten Lösung:
Mit $g(x) = \dot{x}(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)^2$ und $h(t) = 1$ ist $t^2 - 1)\dot{x}(t) + 2tx(t) = tx(t)^2 = g(x)h(t)$, hat also getrennte Variablen.
Trennung der Variablen liefert uns unter Bedingungen an die Anfangsbedingung nur eine lokale Lösung. Wir rechnen trotzdem formal mit TdV mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ und der Annahme, dass diese Werte passend für unsere Rechenschritte gewählt sind, und überprüfen unsere Lösung am Ende mit einer Probe.
Mit Partialbruchzerlegung und der Substitution $z := \alpha - \beta y$, $dz = -\beta dy$ berechnen wir

$$\begin{aligned} G(x) :=& \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\alpha y - \beta y^2} dy = \frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^{x} \frac{1}{y} dy + \frac{\beta}{\alpha}\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\alpha - \beta y} dy \\ =& \frac{1}{\alpha}(\ln|x| - \ln|x_0|) - \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha-\beta x_0}^{\alpha-\beta x} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{\alpha}(\ln\left|\frac{x}{x_0}\right| - \ln\left|\frac{\alpha-\beta x}{\alpha - \beta x_0}\right| = \frac{1}{\alpha}\ln\left|\frac{c_0 x}{\alpha - \beta x}\right|\,. \end{aligned}$$

wobei $c_0 := \frac{\alpha - \beta x_0}{x_0}$.
Also ist für TdV die Gleichung

$$\frac{1}{\alpha}\ln\left|\frac{c_0 x}{\alpha - \beta x}\right| = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

zu lösen. Diese ist für $\frac{c_0 x}{\alpha - \beta x}$ erfüllt, genau dann, wenn

$$x = \frac{\alpha - \beta x}{c_0} e^{\alpha(t-t_0)} \Leftrightarrow x(1 + \frac{\beta}{c_0} e^{\alpha(t-t_0)} = \frac{\alpha}{c_0} e^{\alpha}(t - t_0) \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{1 + \gamma e^{-\alpha(t-t_0)}}$$

mit $\gamma := c_0/\beta = \frac{\alpha 0 \beta x_0}{\beta x_0}$.
Ist $\gamma > 0$, so ist die Abbildung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x(t) = \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{1 + \gamma e^{-\alpha(t-t_0)}}$$

wohldefiniert und eine Probe zeigt, dass sie auch auf ganz $\mathbb{R}$ unsere Differentialgleichung löst.
Mit $x_0 := 1$, $t_0 := 0$ erhalten wir $\gamma = \frac{\alpha - \beta}{\beta} > 0$ und

$$x(t) = \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{1 + \frac{\alpha-\beta}{\beta}e^{-\alpha t}}$$

ist eine nichtkonstante Lösung unserer Differentialgleichung.
