INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

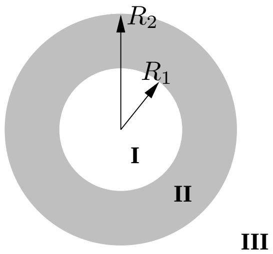
KLASSISCHE FELDTHEORIE — SoSe 2006

4. Übungsblatt — Abgabe: Mittwoch, 03.05.06 (bis 11.25 Uhr) im Kasten bei A316/A317

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

15. **Kugelsymmetrische Ladungsverteilung** **(10 Punkte)**
Das Grundproblem der Elektrostatik ist das Lösen der Poisson-Gleichung $\Delta\Phi(\underline{r}) = -\rho(\underline{r})/\epsilon_0$ unter gegebenen Randbedingungen. Als Beispiel betrachten wir die folgende Ladungsdichte $\rho(\underline{r})$:

$$\rho(\underline{r}) = \begin{cases} 0 & |\underline{r}| < R_1 \quad \text{(Bereich I)} \\ \rho_0 = \text{const} \quad \text{für} & R_1 \leq |\underline{r}| \leq R_2 \quad \text{(Bereich II)} \\ 0 & R_2 < |\underline{r}| \quad \text{(Bereich III)} \end{cases} \quad .$$



Gegeben seien zudem die Dirichlet-Randbedingungen

$$\lim_{|\underline{r}|\to\infty} \Phi(\underline{r}) = 0 \quad ; \quad \Phi(\underline{r})\big|_{|\underline{r}|=R_1} = \frac{C_1}{R_1} \quad ; \quad \Phi(\underline{r})\big|_{|\underline{r}|=R_2} = \frac{C_2}{R_2} \quad ,$$

wobei C_1 und C_2 Konstanten sind. Außerdem soll das Potential bei $|\underline{r}| = R_1$ und $|\underline{r}| = R_2$ stetig sein.

(a) Begründen Sie, daß in diesem Beispiel das Potential nur eine Funktion von $r = |\underline{r}|$ ist. Zeigen Sie, daß sich die Poisson-Gleichung auf eine gewöhnliche DGL 2. Ordnung reduziert und lösen Sie diese allgemein. Geben Sie das Potential Φ und das elektrische Feld $\underline{E}$ in den Bereichen I, II und III an. *Hinweis:* Verwenden Sie dafür die Poisson-Gleichung in sphärischen Polarkoordinaten.

(b) Verwenden Sie die aus Aufgabe 3(c) bekannte Lösungsformel für die Poisson-Gleichung

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathrm{d}^3r' \, \frac{\rho(\underline{r}\,')}{|\underline{r} - \underline{r}\,'|} \quad \text{mit} \quad \rho(\underline{r}) = 0 \ \text{für} \ \underline{r} \notin V \quad ,$$

um das Potential $\Phi(\underline{r})$ in den Raumbereichen I, II und III anzugeben.

(c) Nutzen Sie die Symmetrie des Problems aus, um das elektrische Feld $\underline{E}$ direkt mit Hilfe der integralen Form Gaußschen Gesetzes in den Raumbereichen I, II und III zu berechnen.

(d) Skizzieren Sie für $R_1 = 0$ das Potential Φ und die Feldstärke $|\underline{E}|$ als Funktion von $|\underline{r}|$.

16. **Wasserstoffatom im Grundzustand** **(10 Punkte)**
In einem einfachen Modell für den Grundzustand des Wasserstoffatoms ist die Kernladung punktförmig im Ursprung zentriert. Die mittlere Elektronenladungsdichte ist durch

$$\rho_e(r) = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \quad \text{mit} \quad r = |\underline{r}|$$

gegeben, wobei a den Bohrschen Radius bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie das Potential Φ des Wasserstoffatoms sowohl durch direktes Integrieren des Poisson-Integrals als auch durch Lösen der (radialen) Poisson-Gleichung (Laplace-Operator in sphärischen Polarkoordinaten benutzen!).

(b) Bestimmen Sie aus dem Ergebnis von Teilaufgabe (a) das elektrische Feld.

(c) Bestimmen Sie das elektrische Feld auch direkt aus der integralen Form des Gaußschen Gesetzes.

(d) Diskutieren Sie Φ und E in den Grenzfällen $r \ll a$ und $r \gg a$.

Rückseite beachten! ⟶

17. **Legendre-Polynome I: Laplace-Gleichung für zylindersymmetrische Probleme (10 Punkte)**
Die Laplace-Gleichung $\triangle\Phi(\underline{r}) = 0$ soll für den Spezialfall einer zylindersymmetrischen Geometrie gelöst werden. Die prinzipielle Vorgehensweise ist Ihnen aus der Quantenmechanik von der Behandlung des Wasserstoffatoms bekannt.

(a) Leiten Sie mit dem Separationsansatz $\Phi(\underline{r}) = P(\cos\theta)\,Q(\phi)\,U(r)/r$ aus der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\triangle\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\,\Phi(\underline{r})\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi(\underline{r})}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi(\underline{r})}{\partial\phi^2} = 0 \tag{1}$$

gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen $P(\cos\theta)$, $Q(\phi)$ und $U(r)$ ab. Zeigen Sie: $Q(\phi) = \exp(im\phi)$. Warum sind nur die Werte $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ zugelassen?

(b) Wir betrachten im folgenden zylindersymmetrische Lösungen von $\Delta\Phi(\underline{r}) = 0$, d.h. es ist $m = 0$. Für $P(\cos\theta)$ sollten Sie jetzt die DGL

$$(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \lambda P(x) = 0 \quad \text{mit} \quad x = \cos\theta \tag{2}$$

erhalten. λ ist eine Konstante. Zeigen Sie, daß die Legendre-Polynome

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l \quad ; \quad l \in \mathbb{N} \tag{3}$$

die DGL (2) lösen. Geben Sie die fünf niedrigsten $P_l(x)$ an.
Hinweis: Differenzieren Sie $(l+1)$-mal die Gleichung

$$(x^2-1)\frac{\mathrm{d}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x} = 2lx(x^2-1)^l \quad .$$

(c) Zeigen Sie, daß die P_l orthogonale Funktionen auf dem Intervall $-1 \leq x \leq 1$ sind, d.h. daß gilt:

$$\langle P_l|P_{l'}\rangle := \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\,P_l(x)P_{l'}(x) = \mathrm{const}\cdot\delta_{ll'} \quad .$$

Zeigen Sie dafür zunächst mittels partieller Integration

$$\langle P_l|DP_{l'}\rangle = \langle DP_l|P_{l'}\rangle \quad \text{mit} \quad DP_l(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)P_l(x) \tag{4}$$

und verwenden Sie Gleichung (2), um $\langle P_l|D\,P_{l'}\rangle = -l(l+1)\langle P_{l'}|P_l\rangle$ herzuleiten.
Bemerkung: In Gleichung (4) wird ein *Skalarprodukt* $\langle . | . \rangle$ auf dem Raum der stetigen Funktionen $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ definiert.

(d) Für $l = l'$ gilt (ohne Beweis!): $\langle P_l|P_l\rangle = \frac{2}{2l+1}$. Verifizieren Sie diese Gleichung für $l = 0, 1, 2, 3$.

(e) Zeigen Sie, daß $U(r) = a_l r^{l+1} + \frac{b_l}{r^l}$ die allgemeine Lösung der Radialgleichung (also der DGL für $U(r)$) ist. Mit a_l und b_l werden Konstanten bezeichnet.

(f) Die normierten Legendre-Polyome $\tilde{P}_l(x) := \sqrt{(2l+1)/2}\,P_l(x)$ ($l \in \mathbb{N}$) bilden einen *vollständigen Satz orthonormierter Funktionen* auf dem Intervall $[-1,1]$. Das bedeutet, daß sich Funktionen $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ als Linearkombination der $\tilde{P}_l$ darstellen lassen:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l\tilde{P}_l(x) \quad .$$

Stellen Sie $f(x) = x^3$ als Linearkombination der $\tilde{P}_l(x)$ dar.
Hinweis: Machen Sie den Ansatz $x^3 = \sum_{l=0}^{3} P_l(x)$; Koeffizientenvergleich!

18. **Ellipsoid mit inhomogener Ladungsdichte (Bearbeitung freiwillig, + 10 Zusatzpunkte)**
Die Oberfläche eines Rotationsellipsoids (Halbachsen $a > b = c$), dessen Zentrum im Koordinatenursprung liegt, trage die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma(\underline{r}) = \frac{e}{b\sqrt{a^2+b^2-|\underline{r}|^2}} \quad .$$

(a) Bestimmen Sie die Gesamtladung auf der Oberfläche des Ellipsoids.

(b) Berechnen Sie das Potential Φ auf der Symmetrieachse innerhalb und außerhalb des Ellipsoids. Was erhält man für sehr weit vom Ellipsoid entfernte Punkte?
Hinweis: Als Symmetrieachse wird hier die Achse bezeichnet, die entlang der Halbachse a verläuft.