Übungsblatt 3

Abgabe: Mittwoch, 07. November 2012, vor der Vorlesung (bis 7.55 h)

Aufgabe 3.1 (10 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

a)
$$\forall t > 0 : \quad \dot{x}(t) = -\frac{2x(t)}{t} + 4t \,, \quad x(1) = x_0 \in \mathbb{R} \,.$$

b)
$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \dot{x}(t) = \frac{x(t)}{1+t^2} + 2t - 1 \,, \quad x(0) = 1$$

Lösungsskizze:

a) Die Gleichung ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung, dh von der Form $\dot{x}(t) + g(t)x(t) = h(t)$ mit $g(t) := \frac{2}{t}$ und $h(t) := 4t$. Wir lösen das AWP durch Variation der Konstanten.

Wegen $t > 0$ gilt
$$G(t) := \int_1^t g(s)ds = 2\int_1^t \frac{1}{s}ds = 2(\ln(t) - \ln(1)) = 2\ln(t) \,.$$
$e^{-G(t)} = \frac{1}{t^2}$ ist eine nichttrinviale Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, und wir erhalten die Lösung durch
$$x(t) = e^{-G(t)}\left(x_0 + \int_1^t h(s)e^{G(s)}ds\right)$$
Es gilt
$$\int_1^t h(s)e^{G(s)}ds = \int_1^t 4se^{2\ln(s)}ds = 4\int_1^t s^3 ds = t^4 - 1 \,,$$
und damit
$$x(t) = \frac{1}{t^2}(x_0 - 1 + t^4) = t^2 + \frac{x_0 - 1}{t^2} \,.$$

b) Hier liegt ebenfalls eine inhomogene lineare Differentialgleichung vor. Mit $g(t) := -\frac{1}{a+t^2}$ und $h(t) = 2t - 1$ ist
$$G(t) := \int_0^t g(s)ds = -\arctan(t) + \arctan(0) = -\arctan(t)$$
und
$$\int_0^t h(s)e^{G(s)}ds = \int_0^s (2t-1)e^{-\arctan(s)}ds \,. \tag{1}$$
Weiter gilt
$$\int_0^t e^{-\arctan(s)}ds = \Big[-(1+s^2)e^{-\arctan(s)}\Big]_0^t = -(1+t^2)e^{G(t)} + 1 \,.$$
Wegen $2s = (s^2+1)'$ erhält man mit partieller Integration
$$\int_0^t 2se^{G(s)}ds = \Big[(s^2+1)e^{G(s)}\Big]_0^t + \int_0^t -(s^2+1)\frac{-1}{s^2+1}e^{G(s)}ds = 0 \,,$$
also
$$\int_0^t h(s)e^{G(s)}ds = (1+t^2)e^{G(t)} - 1 \,.$$
Die Lösung ist also
$$x(t) = e^{-G(t)}(1 + (1+t^2)e^{G(t)} - 1) = 1 + t^2 \,.$$

Aufgabe 3.2 (10 Punkte)

Geben Sie ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}^+$ an, so dass das Anfangswertproblem

$$\forall t \in I: \quad \dot{x}(t) = \frac{x(t)^2 - 3t^2}{2x(t)t}, \quad x(1) = 7$$

eine Lösung besitzt und berechnen Sie diese Lösung durch Zurückführung auf die *Trennung der Variablen.*

Lösungsskizze: Es gilt für $t \neq 0$, $x(t) \neq 0$

$$\dot{x} = \frac{x(t)^2 - 3t^2}{2x(t)t} = \frac{1}{2}\left(\frac{x(t)}{t} - \frac{3}{\frac{x(t)}{t}}\right),$$

also liegt eine homogene Dgl. vor.
Wir substituieren mit $u(t) := \frac{x(t)}{t}$. Mit $f(u) = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$ ist dann

$$x(t) = tu(t) \tag{2}$$

und $f(u(t)) = \dot{x}(t) = t\dot{u}(t) + u(t)$, also erhalten wir das neue Anfangswertproblem

$$\dot{u} = \frac{1}{t}(f(u) - u) = -\frac{1}{2}\left(u + \frac{3}{u}\right)\frac{1}{t}, \quad u(1) = \frac{x_0}{t_0} = \frac{7}{1} = 7. \tag{3}$$

und diese hat getrennte Variablen.
Wir setzen $g(u) = -\frac{1}{2}\left(u + \frac{3}{u}\right)$ und $h(t) = \frac{1}{t}$. Dann ist, für $u(t_0) =: u_0 \neq 0$ und der Substitution $z = u^2 + 3$, $dz = 2udu$ und sofern unterwegs alles wohldefiniert ist

$$\int_{u_0}^{u} \frac{d\tilde{u}}{g(\tilde{u})} = -2\int_{u_0}^{u} \frac{d\tilde{u}}{\tilde{u} + \frac{3}{\tilde{u}}} = -\int_{u_0}^{u} \frac{2\tilde{u}}{\tilde{u}^2 + 3} d\tilde{u} = -\int_{u_0^2+3}^{u^2+3} \frac{1}{z} dz = -\ln(u^2 + 3) + \ln(u_0^2 + 3)$$

und weil wir nur eine Lösung für $t > 0$ suchen

$$\int_{t_0}^{t} h(\tilde{t}) d\tilde{t} = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tilde{t}} d\tilde{t} = \ln(t) - \ln(t_0).$$

Nach Trennung der Variablen erhalten wir u also durch Lösen der Gleichung

$$-\ln(u^2 + 3) + \ln(u_0^2 + 3) = \ln(t) - \ln(t_0).$$

Anwenden von exp liefert die äquivalente Gleichung

$$\frac{(u_0^2 + 3)}{(u^2 + 3)} = \frac{t}{t_0} \Leftrightarrow u^2 = \frac{t_0(u_0^2 + 3)}{t} - 3 \Leftrightarrow \pm\left(\frac{t_0(u_0^2 + 3)}{t} - 3\right)^{\frac{1}{2}} = u.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert nun die Kanditaten

$$u = \pm\left(\frac{52}{t} - 3\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dieser Ausdruck ist für $t > 0$ wohldefiniert, falls

$$3 \leq \frac{52}{t} \Leftrightarrow t \leq \frac{52}{3}.$$

Da TdV uns eine lokal eindeutige Lösung garantiert, rechnen wir noch nach, welche der beiden Kanditaten wirklich eine Lösung des AWP (3) ist: Es gilt $\pm\sqrt{\frac{52}{1} - 3} = \pm 7$. Also kommt nur die Variante

$$u(t) = \sqrt{\frac{52}{t} - 3}$$

in Frage. Wegen

$$\dot{u}(t) = -\frac{52}{2u(t)t^2} = -\frac{1}{2t}\left(\frac{u^2(t) + 3}{u(t)}\right).$$

Ist u tatsächlich eine Lösung auf $(0, 52/3)$.

Nun setzen wir das ganze in Gleichung 2 ein und erhalten

$$x(t) = tu(t) = t\sqrt{\frac{52}{t} - 3} = \sqrt{52t - 3t^2}$$

Eine erneute Probe zeigt, dass $x(t)$ auf $(0, 52/3)$ wohldefiniert ist und dort tatsächlich das gegebene AWP löst.

Aufgabe 3.3 (optional)

Beweisen Sie Satz II.4 aus der Vorlesung.

Lösungsskizze: Geht im Wesentlichen genauso wie der Beweis Satz II.3.

Aufgabe 3.4 (optional)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\forall t > 0 : \quad \dot{x}(t) = \frac{t + 2x(t) + 11}{t + 5} \quad x(0) = 17\,.$$

Lösungsskizze: Diese Dgl kann auf Trennung der Variablen zurückgeführt werden (3. Typ), da mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

det $A \neq 0$ gilt.
Wir suchen t_* und x_*, sodass mit $s := t - t_*$ und $y(s) := x(s + t_*) - x_*$, so dass

$$\dot{y}(s) = \frac{1 + 2\frac{y(s)}{s}}{1 + 0\frac{y(s)}{s}}\,.$$

Nachrechnen (auch im allgemeinen Fall 3) zeigt, dass das für die Lösung von

$$A(t, x)^T = (-11, -5)^T$$

gilt. Lösen dieses LGS liefert $t_* = -5$und $x_* = -3$, also $s = t + 5$ und $y(s) = x(s - 5) + 3$. Die neue Anfangsbedingung ist dann $s_0 = 5$ und $y_0 = 20$ und die neue Gleichung ist

$$\dot{y}(s) = 1 + \frac{2y}{s}\,.$$

Da wir jetzt eine homogene Dgl haben, substituieren wir mit $u(s) := \frac{y(s)}{s}$ und erhalten das neue AWP

$$\dot{u}(s) = \frac{1 + u}{s}\,, \quad u_0 = 4\,.$$

Trennung der Variablen liefert nun

$$u(s) = s - 1$$

und Rücksubstituieren liefert $y = s^2 - s$ und schließlich

$$x(t) = t^2 + 9t + 17\,.$$