



11. Homogen geladene Kugeloberfläche

Die Oberfläche einer Kugel mit Radius R trägt die konstante Flächenladungsdichte σ_0 . Der Mittelpunkt der Kugel soll der Koordinatenursprung sein. Wir unterscheiden die Raumbereiche I ($r < R$) und II ($r > R$) mit $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

- (a) Berechnen Sie das Potential $\Phi(\underline{r})$ in den Raumbereichen I und II aus dem Poisson-Integral

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

und bestimmen Sie damit das elektrische Feld $\underline{E}$.

- (b) Ermitteln Sie das Potential $\Phi(\underline{r})$, indem Sie die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi(\underline{r}) = 0$ unter Ausnutzung von Symmetrien in den Bereichen I und II separat lösen. Bestimmen Sie die auftretenden Integrationskonstanten aus der Randbedingung $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(\underline{r}) = 0$. Zudem soll $\Phi(\underline{r})$ bei $r = R$ stetig sein. Welche zusätzliche Bedingung kommt im Bereich $r < R$ hinzu? Skizzieren Sie Φ als Funktion von r .

Hinweis: Eine Integrationskonstante bleibt (scheinbar) frei. Legen Sie diese durch Vergleich mit Ihren Ergebnissen aus Teil (a) fest.

- (c) Verwenden Sie die integrale Form des Gaußschen Gesetzes, um das elektrische Feld $\underline{E}$ in den Bereichen I und II zu ermitteln. Bestimmen Sie daraus das Potential. Wie verhält sich das elektrische Feld bei $r = R$? Skizzieren Sie $|\underline{E}|$ als Funktion von r .

12. Poisson-Integral

Der Bereich

$$\mathcal{B} = \left\{ \underline{r} = (x_1, x_2, x_3) \mid R_1 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R_2; x_3 = 0; R_1, R_2 > 0 \right\}$$

ist mit einer konstanten Flächenladungsdichte σ belegt. Berechnen Sie das Potential Φ und das elektrische Feld $\underline{E}$ auf der x_3 -Achse. Für das Potential einer geladenen, beliebig geformten Fläche $\mathcal{F}$ gilt

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{F}} \frac{\sigma(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} |d\underline{F}'| \quad ,$$

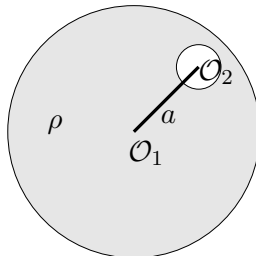
wobei $d\underline{F}'$ den Flächenvektor bezeichnet.

Was erhalten Sie für $\underline{E}$ in den Grenzfällen (i) $R_1 \rightarrow 0$, (ii) $R_2 \rightarrow \infty$ und (iii) $R_1 \rightarrow 0; R_2 \rightarrow \infty$? Skizzieren Sie für den Fall (iii) den Feld- und Potentialverlauf.

Rückseite beachten! $\longrightarrow$

13. Superpositionsprinzip

Eine Kugel mit Radius R_1 ist mit Ausnahme eines kugelförmigen Hohlraums mit der konstanten Ladungsdichte ρ aufgeladen. Der Hohlraum hat den Radius R_2 , sein Mittelpunkt $\mathcal{O}_2$ befindet sich in der Entfernung a vom Mittelpunkt $\mathcal{O}_1$ der großen Kugel. Berechnen Sie das elektrische Feld $\underline{E}$ sowie das Potential Φ in einem beliebigen Punkt im Inneren des Hohlraums. Welchen Wert hat Φ im Mittelpunkt der Hohlkugel?
Hinweis: Wie üblich soll das Potential der gesamten Anordnung im Unendlichen verschwinden.



14. Separationsansatz in kartesischen Koordinaten I

Lösen Sie die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ im Gebiet

$$\mathcal{G} = \{ \underline{r} = (x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq a; 0 \leq x_2 \leq b \}$$

mit Hilfe eines Separationsansatzes unter den folgenden Randbedingungen:

$$\Phi(0, x_2) = \Phi(a, x_2) = 0 \quad ; \quad \Phi(x_1, 0) = 0 \quad ; \quad \Phi(x_1, b) = A_0 + B_0 \sin\left(\frac{3\pi}{a}x_1\right) \quad .$$

Hinweis: Stellen Sie den Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten auf und verwenden Sie den Ansatz $\Phi(x_1, x_2) = U_n(x_1)W_n(x_2)$. Zeigen Sie, daß $U_n(x_1)$ und $W_n(x_2)$ gewöhnliche Differentialgleichungen erfüllen und lösen Sie diese allgemein. Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung hat dann die Form:

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_n U_n(x_1)W_n(x_2) \quad .$$

Bestimmen Sie alle auftretenden Integrationskonstanten aus den Randbedingungen. Dafür benötigen Sie die Orthogonalitätsrelationen für die trigonometrischen Funktionen $S_n = \sin(nx)$ und $C_n = \cos(mx)$, wobei n und m ganze Zahlen sind:

$$\begin{aligned} \langle S_n | S_m \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi dx \sin(nx) \sin(mx) = \delta_{n,m} \quad ; \\ \langle C_n | C_m \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi dx \cos(nx) \cos(mx) = \delta_{n,m} \quad ; \\ \langle S_n | C_m \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi dx \sin(nx) \cos(mx) = 0 \quad . \end{aligned}$$