INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

KLASSISCHE FELDTHEORIE — SOSE 2006

2. Übungsblatt — Abgabe: keine, Besprechung in den Übungen am 19.04.06

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

4. **Integralsätze von Stokes und Gauß I**
   (a) Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld
   $$\underline{A} = \left(\frac{4}{3}x_1 - 2x_2\right)\underline{e}_1 + (3x_2 - x_1)\underline{e}_2$$
   und die Fläche $F = \{\, \underline{r} = (x_1, x_2, x_3) \,|\, (x_1/3)^2 + (x_2/2)^2 \leq 1\,;\, x_3 = 0 \,\}$.
   (b) Verifizieren Sie den Satz von Gauß für das Vektorfeld
   $$\underline{A} = ax_1\underline{e}_1 + bx_2\underline{e}_2 + cx_3\underline{e}_3$$
   und die Kugel $K = \{\, \underline{r} = (x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2 \,\}$.

5. **Differentialoperatoren I**
   Es sei Ψ ein skalares Feld; $\underline{A}$ und $\underline{B}$ seien Vektorfelder. Zeigen Sie unter Benutzung von Komponentenschreibweise und Einsteinscher Summenkonvention:
   (a) $\operatorname{div}(\Psi\underline{A}) = \Psi \operatorname{div}\underline{A} + \underline{A}\cdot\nabla\Psi$;
   (b) $\operatorname{div}(\underline{A}\times\underline{B}) = \underline{B}\cdot\operatorname{rot}\underline{A} - \underline{A}\cdot\operatorname{rot}\underline{B}$.

6. **Fourier-Transformation der Poisson-Gleichung**
   Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung des elektrostatischen Potentials Φ einer Punktladung q, die sich im Ursprung $\underline{0}$ des Koordinatensystems befindet.
   (a) Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\underline{r})$ für eine Punktladung im Koordinatenursprung mit Hilfe der Dirac´schen Delta-Funktion an.
   (b) Zeigen Sie: Das skalare Potential $\Phi(\underline{r})$ ist die Lösung der Poisson-Gleichung
   $$\triangle\Phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\underline{r})\,.$$
   Leiten Sie daraus zunächst die Beziehung
   $$\Phi(\underline{k}) = \frac{1}{\epsilon_0\,|\underline{k}|^2}\,\rho(\underline{k}) \tag{1}$$
   her.
   Erinnerung: Unter der Fouriertransformation einer Funktion $f(\underline{r}) \mapsto f(\underline{k})$ verstehen wir den Ausdruck
   $$f(\underline{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3r\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}} f(\underline{r}) \quad .$$
   Die Rücktransformation ist durch
   $$f(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3k\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} f(\underline{k})$$
   gegeben.
   (c) Berechnen Sie für die Punktladung die Fourier-Transformierte $\rho(\underline{k})$ der Ladungsdichte $\rho(\underline{r})$.
   (d) Setzen Sie nun Ihr Ergebnis für $\rho(\underline{k})$ in Gleichung (1) ein und ermitteln Sie das Potential $\Phi(\underline{r})$ der Punktladung über eine Fourier-Rücktransformation von $\Phi(\underline{k})$.
   Hinweis:
   $$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad a > 0 \quad .$$

Rückseite beachten! ⟶

7. **Integralsätze von Stokes und Gauß II**
Gegeben seien die Felder

$$\underline{F}_1 = \begin{pmatrix} 2x_2 + 2x_1x_3 \\ 3x_1 \\ x_3^3 + x_1^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{F}_2 = \begin{pmatrix} 4x_1 + 10x_2^3 \\ 11x_3 + 2x_1 - 2x_2^2 \\ 4x_2x_3 \end{pmatrix} \quad .$$

(a) Berechnen Sie das Wegintegral von $\underline{F}_1$ entlang des Einheitskreises in der (x_1, x_2)-Ebene mit Hilfe des Satzes von Stokes.

(b) Ermitteln Sie den Fluß des Feldes $\underline{F}_2$ durch die Oberfläche der Einheitssphäre um den Ursprung mit Hilfe des Satzes von Gauß.

8. **Differentialoperatoren II**
Es sei Ψ ein skalares Feld; $\underline{A}$ und $\underline{B}$ seien Vektorfelder. Zeigen Sie unter Benutzung von Komponentenschreibweise und Einsteinscher Summenkonvention:

(a) $\mathrm{rot}(\Psi\underline{A}) = \Psi\,\mathrm{rot}\ \underline{A} - \underline{A} \times \nabla\Psi$;

(b) $\nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla\ (\nabla \cdot \underline{A}) - \triangle\underline{A}$.

9. **Differentialoperatoren III**
Es sei $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)$ und $r = |\underline{r}|$. Unter der Annahme, daß $\underline{B}$, $\underline{P}$ und $\underline{M}$ nicht von $\underline{r}$ abhängen, berechne man (unter Benutzung von Komponentenschreibweise und Summenkonvention)

(a) $\nabla \cdot \underline{r}$;

(b) $\nabla \dfrac{1}{r}$ für $r \neq 0$;

(c) $\triangle \dfrac{1}{r}$ für $r \neq 0$;

(d) $\nabla \times \left(\dfrac{1}{2}\underline{B} \times \underline{r}\right)$;

(e) $\nabla \left(\dfrac{\underline{P} \cdot \underline{r}}{r^3}\right)$ für $r \neq 0$;

(f) $\nabla \times \left(\dfrac{\underline{M} \times \underline{r}}{r^3}\right)$ für $r \neq 0$.

10. **Coulomb-Potential**
Das Coulomb-Potential einer Punktladung q am Ort $\underline{0}$ lautet

$$\Phi\,(\underline{r}) = \frac{\alpha}{r} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{und} \quad r = |\underline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad .$$

(a) Stellen Sie die Taylorreihe von $\Phi\,(\underline{r})$ um den Punkt $\underline{r} = \underline{r}_0 \neq \underline{0}$ bis zur zweiten Ordnung auf.

(b) Geben Sie das zugehörige elektrische Feld $\underline{E} = -\nabla\Phi$ an.

(c) Skizzieren Sie die Feldlinien und die Äquipotentialflächen.

(d) Ermitteln Sie $\triangle\Phi$ für $r > 0$ und verifizieren Sie den Gaußschen Satz für das Vektorfeld $\underline{E}$ und die Gebiete $\mathcal{K}_1 = \{\underline{r}\,|\,0 < \epsilon \leq r \leq R\}$ bzw. $\mathcal{K}_2 = \{\underline{r}\,|\,r \leq R\}$. Geben Sie $\triangle\Phi$ bzw. $\mathrm{div}\,\underline{E}$ für beliebige $\underline{r}$ an.

Allgemeine Hinweise zum Übungsbetrieb

- Mit Fragen zur Vorlesung und zu den Übungsaufgaben können Sie sich jederzeit wenden an:

Name	Raum	Tel.	Mail
Andre Ahlbrecht	A 216	391-5205	drwnhl@gmx.de
Prof. Dr. Uwe Motschmann	A 312	391-5186	u.motschmann@tu-bs.de
Joachim Müller	A 225	391-5183	joa.mueller@tu-bs.de
Ferdinand Plaschke	-	-	f.plaschke@tu-bs.de
Sven Simon	A 317	391-5187	sven.simon@tu-bs.de

- Abgabe der Hausaufgaben: jeweils am Mittwoch bis 11.25 Uhr, im Briefkasten zwischen Raum A316 und A317 (Mendelssohnstr. 3, 3. Etage)
- Erste Klausur: Freitag, 09. Juni (9.00-11.30 Uhr) in MS 3.1
- Zweite Klausur: Donnerstag, 03. August (9.00-11.30 Uhr) in MS 3.1