Übungsblatt 1

Abgabe: Bis Freitag, 19.10.2012, 16h bei Nadja Worliczek, Rebenring 31, Aufgang A14, Raum 131

Aufgabe 1.1 (10 Punkte)

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}_0^+$ heißt Norm auf X $:\Leftrightarrow$

(i) $\forall x \in X : \{\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0\}$

(ii) $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(iii) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

a) Für $d \in \mathbb{N}$ definieren wir die Abbildung $\| \cdot \|_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_0^+$ durch

$$\|(x_1, \ldots, x_d)\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}\,.$$

Zeigen Sie, dass $\| \cdot \|_2$ eine Norm auf $\mathbb{R}^d$ ist.

b) Für $d \in \mathbb{N}$ definieren wir Abbildungen $\| \cdot \|_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_0^+$ durch

$$\|(x_1, \ldots, x_d)\|_1 := |x_1| + \ldots + |x_d|$$

und $\| \cdot \|_\infty : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_0^+$ durch

$$\|(x_1, \ldots, x_d)\|_\infty := \max\{|x_j| \mid 1 \leq j \leq d\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $\| \cdot \|_1$ und $\| \cdot \|_\infty$ ebenfalls Normen auf $\mathbb{R}^d$ sind.

c) Sei $d \geq 2$. Bestimmen Sie Konstanten $C_1, \ldots, C_6 \in (0, \infty)$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt:

- $C_1\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq C_2\|x\|_2$ und $C_1 < C_2$
- $C_3\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq C_4\|x\|_1$ und $C_3 < C_4$
- $C_5\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C_6\|x\|_2$ und $C_5 < C_6$

Lösungsskizze:

a) siehe Übung

b) siehe Übung

c)
- z.B $1 \cdot \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq d\|x\|_\infty \leq d\|x\|_1$
- z.B. $\frac{1}{\sqrt{d}}\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq 1 \cdot \|x\|_2$
- z.B. gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$\frac{1}{d}\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq 1 \cdot \|x\|_1.$$

Übungsblatt 2

Abgabe: Mittwoch, 31.10.2012 vor der Vorlesung bis 7.55h

Aufgabe 2.1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie zwei verschiedene Lösungen $x_1,\, x_2 \in C^1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R})$ der Differentialgleichung

$$\forall t > 0 : \quad \dot{x}(t) = 2x(t)\,.$$

Lösungsskizze: Diese Differentialgleichung ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Daher sind nach Vorlesung all ihre Lösungen von der Form

$$x(t) = x_0 \exp(2 \int_{t_0}^{t} dt)\,.$$

Mit $t_0 = 0$ erhalten wir $x(t) = x_0 e^{2t}$. Um zwei verschiedene Lösungen zu erhalten müssen wir nur noch zwei verschiedene Werte für x_0 einsetzen, z.B. $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$.

Aufgabe 2.2 (10 Punkte)

Bestimmen Sie eine Lösung $x \in C^1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R})$ der Differentialgleichung

$$\forall t > 0 : \quad \dot{x}(t) = -\frac{1}{(1+t^2)} x(t)^{\frac{3}{2}}\,, \qquad x(0) = 1\,.$$

Lösungsskizze: Diese Differentialgleichung hat getrennte Variablen. Da $(x(0))^{\frac{3}{2}} = 1$ erhalten wir die Lösung also durch lösen der Gleichung

$$\int_1^x \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}^{3/2}} = \int_0^t -\frac{1}{1+\tilde{t}^2} d\tilde{t}\,.$$

Es gilt

$$\int_1^x \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}^{3/2}} = -2\left[\frac{1}{\sqrt{\tilde{x}}}\right]_1^x = -2(\frac{1}{x} - 1)$$

und

$$\int_0^t -\frac{1}{1+\tilde{t}^2} d\tilde{t} = -\arctan(t)\,.$$

Wegen $\arctan(t) \neq -2$ für alle $t \in \mathbb{R}$ löst

$$x(t) = \left(\frac{2}{\arctan(t) + 2}\right)^2$$

die obige Integralgleichung und damit auch unser Anfangswertproblem.

Vorlesung: 8-9.30h, PK 2.2
Übung: Termine und Orte werden noch bekanntgegeben
Website zur Vorlesung: http://www.iaa.tu-bs.de/vbach/