



1. Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen

(6 Punkte)

Die wichtigsten Eigenschaften rotationsfreier Vektorfelder sollen wiederholt werden.

- (a) Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}(-x_2 \underline{e}_1 + x_1 \underline{e}_2) \quad \text{mit} \quad \underline{r} = (x_1, x_2, x_3) \quad .$$

Zeigen Sie: $\text{rot } \underline{A}(\underline{r}) = 0$ für $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. Berechnen Sie außerdem das Linienintegral $\oint_C \underline{A} \cdot d\underline{r}$, wobei C der Rand eines Kreises mit Radius R und Mittelpunkt $\underline{M} = a \underline{e}_3$ ist. Der Vektor $\underline{e}_3$ steht senkrecht auf der von C eingeschlossenen Kreisfläche.

- (b) Zeigen Sie, daß die Rotation des Vektorfeldes

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\underline{r}}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}$$

für alle $|\underline{r}| \neq 0$ verschwindet. Betrachten Sie dann eine Kugel mit Radius R , deren Mittelpunkt im Ursprung liegt. Verifizieren Sie die Beziehung $\oint_C \underline{B} \cdot d\underline{r} = 0$ für die Kurven mit $|\underline{r}| = R$ und $\underline{r} \cdot \underline{e}_3 = b$.

- (c) Offensichtlich haben beide Vektorfelder eine verschwindende Rotation unter den angegebenen Voraussetzungen. Sind beide Felder konservativ? Kommentieren Sie Ihre Antwort.

2. Vektoranalysis

(16 Punkte)

Das Rechnen mit Differentialoperatoren soll wiederholt werden.

- (a) Betrachten Sie zwei stetig differenzierbare Vektorfelder $\underline{A}, \underline{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie unter Benutzung von Komponentenschreibweise und Einsteinscher Summenkonvention:

- i. $\nabla (\underline{A} \cdot \underline{B}) = (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{A} + (\underline{A} \cdot \nabla) \underline{B} + \underline{B} \times (\nabla \times \underline{A}) + \underline{A} \times (\nabla \times \underline{B})$;
ii. $\nabla \times (\underline{A} \times \underline{B}) = (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{A} - (\underline{A} \cdot \nabla) \underline{B} + \underline{A} (\nabla \cdot \underline{B}) - \underline{B} (\nabla \cdot \underline{A})$.

Dabei bezeichnet $\underline{A} \cdot \nabla$ den Differentialoperator, der sich durch das formale Skalarprodukt des Vektorfeldes $\underline{A}$ mit ∇ ergibt.

- (b) Betrachten Sie ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\underline{E} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft

$$\nabla \times \underline{E} = 0 \quad (\text{statische Form des Faraday'schen Induktionsgesetzes}) \quad .$$

Zeigen Sie unter Benutzung von Komponentenschreibweise und Summenkonvention, daß diese Gleichung durch den Ansatz

$$\underline{E} = -\nabla \Phi \quad \text{mit} \quad \Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

gelöst wird. Zeigen Sie weiter, daß Φ in der Form

$$\Phi(\underline{r}) = - \int_0^1 \underline{E}(t \underline{r}) \cdot \underline{r} dt$$

dargestellt werden kann.

Rückseite beachten! $\longrightarrow$

- (c) Magnetfelder haben keine Quellen:

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad .$$

Zeigen Sie unter Benutzung von Komponentenschreibweise und Summenkonvention, daß diese Gleichung durch den Ansatz

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} \quad \text{mit} \quad \underline{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

gelöst wird. Das Feld $\underline{A}$ ist das sog. *Vektorpotential* des Magnetfeldes $\underline{B}$. Zeigen Sie weiter, daß $\underline{A}$ in der Form

$$\underline{A}(\underline{r}) = \int_0^1 \underline{B}(t\underline{r}) \times (t\underline{r}) dt$$

dargestellt werden kann, wobei das Integral über den $\mathbb{R}^3$ -wertigen Integranden komponentenweise aufzufassen ist.

- (d) Betrachten Sie das Magnetfeld

$$\underline{B} = (x_1 x_3 - 2x_3) \underline{e}_1 - x_2 x_3 \underline{e}_2 + x_1 \underline{e}_3 \quad .$$

Überzeugen Sie sich zunächst davon, daß $\underline{B}$ quellenfrei ist. Bestimmen Sie dann ein geeignetes Vektorpotential $\underline{A}$ mit $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$.

3. Greensche Funktion der Poisson-Gleichung

(8 Punkte)

Ein statisches (d.h. zeitunabhängiges) elektrisches Feld wird durch die Gleichungen

$$\operatorname{div} \underline{E}(\underline{r}) = \frac{\rho(\underline{r})}{\epsilon_0} \quad ; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \underline{E}(\underline{r}) = 0 \quad . \quad (2)$$

beschrieben. Mit $\rho(\underline{r})$ wird die Ladungsdichte bezeichnet. Gl. (2) impliziert die Existenz eines skalaren Potentials $\Phi(\underline{r})$ mit $\underline{E} = -\nabla\Phi$. Einsetzen dieses Ansatzes in Gl. (1) führt zur sog. *Poisson-Gleichung*

$$\Delta \Phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r}) \quad (3)$$

für das Potential Φ . Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung der allgemeinen Lösung von Gl. (3) über die Fourier-Transformation. Unter der Fouriertransformation einer Funktion $f(\underline{r}) \mapsto f(\underline{k})$ verstehen wir den Ausdruck

$$f(\underline{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}} f(\underline{r}) \quad .$$

Die Rücktransformation ist durch

$$f(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} f(\underline{k})$$

gegeben.

- (a) Sukzessives Anwenden von Fouriertransformation und Rücktransformation auf $f(\underline{r})$ sollte wieder auf $f(\underline{r})$ führen. Überprüfen Sie diese Aussage.
 (b) Zeigen Sie, daß

$$\Phi(\underline{k}) = \frac{1}{\epsilon_0 |\underline{k}|^2} \rho(\underline{k}) \quad (4)$$

gilt, wenn $\Phi(\underline{r})$ und $\rho(\underline{r})$ die Poisson-Gleichung erfüllen.

- (c) Zeigen Sie, daß die Rücktransformation von Gleichung (4) auf die Form

$$\Phi(\underline{r}) = \int d^3r' \rho(\underline{r}') G(\underline{r}, \underline{r}')$$

führt. Berechnen Sie die Greensche Funktion $G(\underline{r}, \underline{r}')$. Als Ergebnis sollten Sie

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad \text{bzw.} \quad \Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

erhalten.

Hinweis: Benutzen Sie (ohne Beweis!)

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad a > 0 \quad .$$