



## 20. Linearisierung der Feldgleichungen

(Präsenzaufgabe)

In dieser Aufgabe soll die in der Vorlesung nur kurz angesprochene Linearisierung der Einsteinschen Feldgleichungen wiederholt werden. Hierbei wird angenommen, dass die Metrik nur wenig von der Minkowski-Metrik abweicht, d.h.

$$g_{mn} = \eta_{mn} + f_{mn} \quad \text{mit} \quad |f_{mn}| \ll 1 \quad . \quad (1)$$

Terme höherer Ordnung in den  $f_{mn}$  sollen in der ganzen Rechnung vernachlässigt werden.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Formen der Feldgleichungen,

$$R_{ip} - \frac{R}{2} g_{ip} = -\kappa T_{ip} \quad (2)$$

und

$$R_{ip} = -\kappa \left( T_{ip} - \frac{T}{2} g_{ip} \right) \quad . \quad (3)$$

(b) Zeigen Sie weiterhin

$$g^{mn} = \eta^{mn} - f^{mn} \quad . \quad (4)$$

*Hinweis:* Betrachten Sie die Größe  $g_{mr} g^{rn}$ .

(c) Nun soll der linearisierte Ricci-Tensor  $R_{ip} = R_{imp}^m = g^{km} R_{mikp}$  bestimmt werden. Nutzen Sie dazu die Darstellung des Krümmungstensor mit den 2. Ableitungen der Metrik,

$$R_{mikp} = \frac{1}{2} (g_{mk|i|p} + g_{ip|m|k} - g_{mp|i|k} - g_{ik|m|p}) + g_{sn} (\Gamma_{ip}^s \Gamma_{mk}^n - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{pm}^n) \quad . \quad (5)$$

Als Ergebnis sollten Sie

$$R_{ip} = \frac{1}{2} \left\{ \square f_{ip} + f_{m|i|p}^m - f_{i|m|p}^m - f_{p|i|m}^m \right\} \quad (6)$$

erhalten.

(d) Die gemischten Ableitungsterme lassen sich durch eine geeignete Eichtransformation  $f_{ip} \rightarrow \bar{f}_{ip}$  eliminieren. Geben Sie die linearisierten Feldgleichungen sowie deren allgemeine Lösung an.

## 21. Gravitationsfeld der rotierenden Erde

Analog zum Magnetfeld einer rotierenden Ladungsverteilung erzeugt auch eine rotierende Massenverteilung ein *gravitomagnetisches* Feld. Dieses Feld soll nun für die rotierende Erde bestimmt werden. Gehen Sie dabei von einer konstanten Massendichte aus und vernachlässigen Sie den Druck. Zudem betrachten wir den Fall konstanter Winkelgeschwindigkeit.

- (a) Begründen Sie, dass das zu lösende Problem

$$f_{mn}(\underline{r}) = -\frac{4\gamma}{c^4} \int \frac{T_{mn} - \frac{T}{2}\eta_{mn}}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3r' \quad (7)$$

lautet.

- (b) Geben Sie  $S_{mn} := T_{mn} - \frac{T}{2}\eta_{mn}$  an und vernachlässigen Sie dabei Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(v^2/c^2)$ .
- (c) Bestimmen Sie die  $f_{mn}$  und geben Sie die Metrik der rotierenden Erde für  $r > R_E$  an.

## 22. Leistungsabstrahlung durch Gravitationswellen

(Zusatzaufgabe)

In dieser Aufgabe soll die Leistung abgeschätzt werden, die eine oszillierende Massenverteilung in Form von Gravitationswellen abstrahlt. Da die vollständige Rechnung etwas aufwändiger ist, wollen wir hier nur die prinzipiellen Abhängigkeiten durch eine Analogiebetrachtung zur Elektrodynamik abschätzen.

- (a) Beschreiben Sie die Analogie zur Elektrodynamik.
- (b) Begründen Sie, dass es im Gegensatz zur Elektrodynamik keine Dipolstrahlung gibt.
- (c) Die abgestrahlte Leistung im Fernfeld eines elektrischen Quadrupols  $Q_e$  ist

$$P_e \sim \frac{w^6}{c^5} \frac{Q_e^2}{\epsilon_0} \quad (8)$$

Was erwarten Sie für die Strahlungsleistung einer oszillierenden Massenverteilung?

- (d) Schätzen Sie die abgestrahlte Leistung bei der Rotation der Erde um die Sonne ab.