



18. Zeitdilatation

Die relativistische Zeitdilatation wurde erstmal 1971 experimentell nachgewiesen¹. Dazu wurden Cäsium-Atom-uhren an Bord eines Linienflugzeuges gebracht, das mit einer Geschwindigkeit von 900 km/h zweimal um die Erde flog. Anschließend wurden die Uhren mit am Boden befindlichen Uhren verglichen.

- Berechnen Sie den Gangunterschied der Uhren nach der Speziellen Relativitätstheorie für eine Flugzeit von 41.2 h (ostwärts) bzw. 48.6 h (westwärts). Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass die Flugroute oberhalb des Äquators verlief (Start und Landung in Quito, Ecuador).
- Berechnen Sie außerdem den Gangunterschied der Uhren aufgrund der gravitativen Zeitdilatation gemäß der Allgemeinen Relativitätstheorie, wenn das Flugzeug eine Flughöhe von 10 km hatte.
- Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Messergebnis von $\Delta t = -59 \pm 10$ ns (ostwärts) bzw. $\Delta t = 273 \pm 7$ ns (westwärts).

19. Radialer Fall ins Schwarze Loch

Ein bedauernswerter Astronaut wurde von seinem Raumschiff in einer Entfernung von $r_0 = 4 r_s$ vor einem Schwarzen Loch ausgesetzt. Wir wollen nun das weitere Schicksal dieses Astronauten, d.h. seinen radialen Fall in das Schwarze Loch diskutieren. Wir betrachten dabei die hypothetische Situation, in der der Astronaut zunächst relativ zum Schwarzen Loch ruht.

- Wäre das Raumschiff bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_\infty = 3/4 c$ dem Schwarzen Loch selbst wieder entkommen? Bestimmen Sie numerisch die Geschwindigkeit, die es mindestens gehabt haben muss, um nicht selbst im Schwarzen Loch gelandet zu sein.
Hinweis: Betrachten Sie das effektive Potential des relativistischen Keplerproblems.
- Bestimmen Sie die Schwarzschildkoordinate r als Funktion der Eigenzeit τ . Welche Eigenzeit vergeht, bis der Astronaut im Zentrum des Schwarzen Loches angekommen ist?
- Berechnen Sie nun r als Funktion von der Koordinatenzeit t . Welche Koordinatenzeit vergeht bis zum Erreichen des Schwarzschildradius? Was erhält man für Photonen?
- Skizzieren Sie $r(\tau)$ und $r(t)$.
- Bestimmen Sie die Gravitationsbeschleunigung mit der der Astronaut beim Passieren des Schwarzschildradius in die Länge gezogen wird für ein Schwarzes Loch der Masse $M_N = M_\odot$ und für $M_N = 10^5 M_\odot$.

¹Hafele-Keating-Experiment: <http://www.sciencemag.org/content/177/4044/166>