



17. Periheldrehung

Auf dem letzten Aufgabenblatt haben wir die Geodätengleichungen in der Schwarzschildgeometrie benutzt, um folgenden Ausdruck für die Bahnkurve eines Teilchens herzuleiten:

$$\dot{r}^2 - x \frac{c^2 r_G}{r} + \frac{B^2}{r^2} - \frac{r_G B^2}{r^3} = A^2 - c^2 = \text{const} \quad (1)$$

mit

$$x = \begin{cases} 0 & , \quad m = 0 \\ 1 & , \quad m \neq 0 \end{cases} \quad \text{sowie} \quad (\dot{}) := \begin{cases} \frac{d}{d\lambda}() & , \quad m = 0 \\ \frac{d}{d\tau}() & , \quad m \neq 0 \end{cases} . \quad (2)$$

A und B bezeichnen hierbei die der Energie bzw. dem Drehimpuls entsprechenden Erhaltungsgrößen.

Wir wollen nun Gleichung (1) für ein Teilchen mit endlicher Masse näherungsweise lösen und somit die Periheldrehung ausrechnen.

- (a) Gehen Sie analog zum Keplerproblem in der klassischen Mechanik vor und bringen Sie (1) durch die Substitution $w = 1/r$ in die Form

$$\frac{d^2 w'}{d\varphi^2} + w = \frac{c^2 r_G}{2B^2} + \frac{3}{2} r_G w^2 \quad \text{und} \quad w' = 0 \quad (3)$$

wobei der Strich die Ableitung nach φ bezeichnet, $()' := \frac{d}{d\varphi}$.

- (b) Zeigen Sie, dass die Vernachlässigung des ART-Terms $\propto w^2$ auf die bekannte Lösung

$$w_0 = \frac{1}{k} (1 + \epsilon \cos \varphi) \quad \text{mit} \quad \frac{1}{k} = \frac{c^2 r_G}{2B^2} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos \varphi} \quad (5)$$

führt.

- (c) Setzen Sie w_0 für w^2 in Gleichung (3) ein und lösen Sie die DGL. Als Ergebnis sollten Sie

$$w_1 = w_0 + \frac{3M^3 c^4}{B^4} \left\{ 1 + \epsilon \varphi \sin \varphi + \epsilon^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos(2\varphi) \right) \right\} \quad (6)$$

erhalten.

(d) Formen Sie die Lösung unter geeigneten Näherungen so um, dass Sie schließlich

$$r(\varphi) = \frac{k}{1 + \epsilon \cos((1 - \delta\varphi_P)\varphi)} \quad \text{mit} \quad \delta\varphi_P = \frac{3M^2c^2}{B^2} \quad (7)$$

erhalten.

(e) Setzen Sie die Werte für den Merkur ein und bestimmen Sie den Winkel der Periheldrehung des Merkur, d.h. ca. $0.104''$ (Bogensekunden) pro Umlauf oder $43''$ pro 100 Jahre.

Exzentrizität des Merkur	$\epsilon = 0.2056$
Große Halbachse des Merkur	$a = 0.3871 \text{ AE} = 57.909 \cdot 10^6 \text{ km}$
Umlaufzeit	88 Tage
Schwarzschild-Radius der Sonne	$a = 2953 \text{ m}$

Nutzen Sie hierbei die Eigenschaften einer Ellipse aus und zeigen Sie

$$\frac{B^2}{Mc^2} = a(1 - \epsilon^2) \quad . \quad (8)$$

(f) *Freiwillig:* Alternativ lässt sich die Rechnung auch noch auf andere Arten durchführen:

- Setzen Sie Gleichung (7) in die ursprüngliche DGL (3) ein und bestimmen Sie $\delta\varphi_P$.
- Gehen Sie analog zur Periheldrehung durch ein Störpotential in der klassischen Mechanik vor und bestimmen Sie

$$\varphi_{max} - \varphi_{min} = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{B}{r^2} dr}{\sqrt{\tilde{U} - V(r) - \frac{B^2}{r^2} + V_{ART}(B, r)}} \quad . \quad (9)$$

Die Abhängigkeit des Potentialterms der ART vom Drehimpuls B verkompliziert allerdings den Lösungsweg im Vergleich zur klassischen Mechanik.