Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

8. Übungsblatt Besprechung: 13. Dezember 2012

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

15. **Hydrodynamik im Newtonschen Gravitationsfeld (Wiederholung von Blatt 7)**

Zeigen Sie, dass die räumliche Komponente der Gleichung

$$T^{ik}{}_{||k} = 0 \tag{1}$$

mit dem Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit

$$T^{ik} = (\rho + \frac{P}{c^2})u^i u^k + g^{ik} P \tag{2}$$

im Newtonschen Grenzfall, d.h. für den metrischen Tensor mit

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2) - (1 + \frac{2\phi}{c^2})dt^2, \tag{3}$$

auf die Gleichung für die Flussgeschwindigkeit $\underline{v}$:

$$\underline{v}_{|t} + (\underline{v} \cdot \nabla)\underline{v} + \nabla P/\rho + \nabla\phi = 0, \tag{4}$$

reduziert werden kann, wobei P den Druck und $\rho = \text{const}$ die Massendichte darstellen. Die Gl. (4) ist als Eulersche Gleichung für das nicht-relativistische Fluid im Newtonschen Gravitationsfeld bekannt.

16. **Geodätengleichung in der Schwarzschild-Geometrie**

Lichtablenkung und Periheldrehung werden durch die Geodätengleichung in der Allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben:

$$\frac{d^2\xi^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{d\xi^j}{d\lambda}\frac{d\xi^k}{d\lambda} = 0, \tag{5}$$

wobei λ ein Parameter entlang der Trajektorie darstellt. Die Indizes stellen die vier Komponenten der Schwarzschild-Geometrie $i, j, k \in \{r, \theta, \phi, t\}$ dar.

(a) Bestimmen Sie die vier Geodäten-Gleichungen für $i, j, k \in \{r, \theta, \phi, t\}$ und geben Sie die zugehörigen Erhaltungsgrößen an.

Bitte wenden ⟶

(b) Die Gleichung für $\xi^1 = r$ ist eine recht unhandliche DGL 2. Ordnung,

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{d_\lambda r}{1-\frac{r_G}{r}}\right\} + \frac{1}{2}\frac{\frac{r_G}{r^2}\left(d_\lambda r\right)^2}{\left(1-\frac{r_G}{r}\right)^2} - r\left(d_\lambda \varphi\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{r_G}{r^2}\left(d_\lambda ct\right)^2 = 0 \quad . \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass diese DGL äquivalent zu

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = -c^2\left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2 = \frac{\left(d_\lambda r\right)^2}{1-\frac{r_G}{r}} + r^2\left(d_\lambda \varphi\right)^2 - \left(1-\frac{r_G}{r}\right)\left(d_\lambda ct\right)^2 \tag{7}$$

ist.

(c) Benutzen Sie die Erhaltungsgrößen aus (a) um (7) eine DGL 1. Ordnung für $r' := d_\lambda r$ zu erhalten. Unterscheiden Sie die Fälle $m \neq 0$ und $m = 0$. Die so erhaltene Gleichung beschreibt die Trajektorie eines Teilchens mit $m \neq 0$ (Periheldrehung) sowie eines Photons $m = 0$ (Lichtablenkung).