


14. Trägheitskräfte (Wiederholung von Blatt 6)

Im Lokalen Inertialsystem ist die Bewegung eines kräftefreien Massenpunkts gegeben durch

$$\frac{d^2 \xi^{i'}}{d\tau^2} = 0 \quad . \quad (1)$$

Es soll überprüft werden, dass die Formulierung der Gleichung in beliebigen Koordinaten noch die bekannten Trägheitskräfte enthält. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- (a) Zeigen Sie, dass Gleichung (1) in beliebigen Koordinaten ξ^i

$$\frac{d^2 \xi^i}{d\tau^2} = -\Gamma_{jk}^i \frac{d\xi^j}{d\tau} \frac{d\xi^k}{d\tau} \quad (2)$$

lautet.

- (b) Betrachten Sie ein rotierendes Koordinatensystem, d.h.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t' & \sin \omega t' \\ -\sin \omega t' & \cos \omega t' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (3)$$

sowie $z' = z$ und $t' = t$. Lösen Sie nach x' und y' auf und bestimmen Sie die vollständigen Differentiale dx' und dy' .

- (c) Berechnen Sie nun das Wegelement ds^2 und lesen Sie den metrischen Tensor g_{ij} ab.
 (d) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole und zeigen Sie, dass Gleichung (2) für $v^2 \ll c^2$ auf die bekannten Ausdrücke für Zentrifugal- und Corioliskraft führt.

15. Hydrodynamik im Newtonschen Gravitationsfeld

Zeigen Sie, dass die räumliche Komponente der Gleichung

$$T^{ik}{}_{|k} = 0 \quad (4)$$

mit dem Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit

$$T^{ik} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u^i u^k + g^{ik} P \quad (5)$$

Bitte wenden $\longrightarrow$

im Newtonschen Grenzfall, d.h. für den metrischen Tensor mit

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2) - (1 + \frac{2\phi}{c^2})dt^2, \quad (6)$$

auf die Gleichung für die Flussgeschwindigkeit $\underline{v}$:

$$\underline{v}|_t + (\underline{v} \cdot \nabla)\underline{v} + \nabla P/\rho + \nabla\phi = 0, \quad (7)$$

reduziert werden kann, wobei P den Druck und $\rho = \text{const}$ die Massendichte darstellen. Die Gl. (7) ist als Eulersche Gleichung für das nicht-relativistische Fluid im Newtonschen Gravitationsfeld bekannt.