


12. Berechnung der Krümmungstensoren
(Präsenzaufgabe)

- (a) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole Γ_{jk}^i und die Riemannschen Krümmungstensoren R_{jkl}^i der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius $r = \text{const}$ und eines Zylinders mit dem Radius $\rho = \text{const}$.
- (b) Erläutern Sie den Unterschied der Krümmungen zwischen der Kugel und dem Zylinder.

13. Trägheitskräfte

Im Lokalen Inertialsystem ist die Bewegung eines kräftefreien Massenpunkts gegeben durch

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} = 0 \quad . \quad (1)$$

Es soll überprüft werden, dass die Formulierung der Gleichung in beliebigen Koordinaten noch die bekannten Trägheitskräfte enthält. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- (a) Zeigen Sie, dass Gleichung (1) in beliebigen Koordinaten $\xi^{i'}$

$$\frac{d^2 \xi^{i'}}{dt'^2} = -\Gamma_{i'j'}^{k'} \frac{d\xi^{j'}}{dt'} \frac{d\xi^{k'}}{dt'} \quad (2)$$

lautet.

- (b) Betrachten Sie ein rotierendes Koordinatensystem, d.h.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3)$$

sowie $z' = z$ und $t' = t$. Lösen Sie nach x und y auf und bestimmen Sie die vollständigen Differentiale dx und dy .

- (c) Berechnen Sie nun das Wegelement ds^2 und lesen Sie den metrischen Tensor $g_{i'j'}$ ab.
- (d) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole und zeigen Sie, dass Gleichung (2) für $v^2 \ll c^2$ auf die bekannten Ausdrücke für Zentrifugal- und Corioliskraft führt.