INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE — WS 2012/2013

5. Übungsblatt — Besprechung: 15. November 2012

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

11. **Parallelverschiebung**

Das kovariante Differential

$$Dv^i = dv^i - \delta v^i = dv^i + \Gamma^i_{jk} v^j d\xi^k \tag{1}$$

beschreibt die infinitesimale Änderung der Komponenten des Vektors $\underline{v}$ im selben Ereignis P. Hierbei ist

$$\delta v^i = -\Gamma^i_{jk} v^j d\xi^k \tag{2}$$

die Änderung der v^i bei *Parallelverschiebung* um $d\xi^k$. Der Vektor $\underline{v}$ wird von $v(P + d\xi^k)$ nach $v(P)$ 'zurückverschoben'.

(a) Zeigen Sie, dass bei einer Parallelverschiebung der Winkel zur Geodäten konstant bleibt.

(b) Wir betrachten ebene Polarkoordinaten (ρ, φ) und die Punkte $P = (\rho_0, 0)$, $Q = (\rho_0, \pi/2)$, $R_1 = (\epsilon, \pi/2)$ und $R_2 = (\epsilon, 0)$.

i. Drücken Sie den Vektor $\underline{v} = \underline{e}_x$ in Polarkoordinaten aus.

ii. Berechen Sie die Verschiebungen

$$\int_P^Q dv^i \qquad \text{und} \int_P^Q \delta v^i \quad .$$

iii. Bestimmen Sie außerdem

$$\oint \delta v^i$$

für den Weg $P \to Q \to R_1 \to R_2 \to P$.

iv. Interpretieren Sie ihr Ergebnis.

(c) Betrachten wir nun die Parallelverschiebung auf einer Kugeloberfläche (ϑ, φ) für den Vektor $\underline{v} = -\underline{e}_\vartheta$ und den Weg $(\pi/2, 0) \to (\pi/2, \pi/2) \to (\epsilon, \pi/2) \to (\epsilon, 0) \to (\pi/2, 0)$.

(d) Berechnen Sie nun die Parallelschiebung allgemein beim Umlauf um ein infinitesimales Parallelogramm aufgespannt durch $\vartheta_0 + d\vartheta$ und $\varphi_0 + d\varphi$. Als Ergebnis sollten Sie erhalten

$$\sum \delta v^i \approx v^i d\vartheta d\varphi \; R^i_{k\varphi\vartheta} \quad , \tag{3}$$

wobei der *Krümmungstensor* R^i_{kmn} gegeben ist durch

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{jl|k} - \Gamma^i_{jk|l} + \Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{jk} \quad . \tag{4}$$