INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE WS 2012/2013

4. Übungsblatt Besprechung: 8. November 2012

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

9. **Kovariante Ableitung** **(Präsenzaufgabe)**

(a) Leiten Sie einen Vektor (in den ebenen Polarkoordinaten) $\underline{V} = V^r \underline{b}_r + V^\theta \underline{b}_\theta$ in Richtung r und θ ab und skizzieren Sie die Änderungen der Basisvektoren entlang beider Richtungen.

(b) Die Christoffel-Symbole werden durch die Ableitungen der Basisvektoren wie folgt definiert.

$$\frac{\partial \underline{b}_j}{\partial \xi^k} = \Gamma^i_{jk} \underline{b}_i \qquad \text{bzw.} \qquad \Gamma^i_{jk} = \underline{b}^i \cdot \frac{\partial \underline{b}_j}{\partial \xi^k} \quad . \tag{1}$$

Erläutern Sie die Bedeutungen der drei Indizes i, j und k an den Christoffel-Symbolen.

(c) Berechnen Sie alle Elemente der Christoffel-Symbole $(\Gamma^r_{rr}, \Gamma^\theta_{rr}, \cdots, \Gamma^\theta_{\theta\theta})$ und der kovarianten Ableitungen $(V^r{}_{||r}, V^r{}_{||\theta}, V^\theta{}_{||r}, V^\theta{}_{||\theta})$. Beachten Sie die Formel der kovarianten Ableitung:

$$\frac{D\underline{V}}{D\xi^j} = \left(\frac{\partial V^i}{\partial \xi^j} + V^k \Gamma^i_{kj} \right) \underline{b}_i \tag{2}$$

bzw. ihrer Komponente:

$$V^i{}_{||j} = \frac{\partial V^i}{\partial \xi^j} + V^k \Gamma^i_{kj}. \tag{3}$$

(d) Bestimmen Sie allgemein die kovariante Ableitung eines kovarianten Vektors, d.h. $V_{i\,||j}$.

(e) Zeigen Sie, dass die kovariante Ableitung eines Tensors der 2. Stufe $T_{ij\;||k}$ (in kovarianten Komponenten) wie folgt gegeben ist:

$$T_{ij\;||k} = T_{ij\;|k} - T_{lj}\Gamma^l_{ik} - T_{il}\Gamma^l_{jk}. \tag{4}$$

10. **Christoffel-Symbole und metrischer Tensor**

Die Christoffel-Symbole können aus dem metrischen Tensor bestimmt werden, da der metrische Tensor auch aus der Basisvektoren besteht.

(a) Der metrische Tensor g_{ij} erfüllt die Bedingung $g_{ij\;||k} = 0$. Formulieren Sie die drei Gleichungen

$$g_{ij\;||k} = 0 \tag{5}$$
$$g_{ik\;||j} = 0 \tag{6}$$
$$g_{jk\;||i} = 0 \tag{7}$$

mit den Christoffel-Symbolen.

(b) Kombinieren Sie die Gl. (5)-(7) und zeigen Sie damit:

$$\Gamma^l_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(g_{ij\;|k} + g_{ik\;|j} - g_{jk\;|i} \right). \tag{8}$$