INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE WS 2012/2013

3. Übungsblatt Besprechung: 1. November 2012

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

7. **Tensoren (Wiederholung)**

Als einen Tensor n-ter Stufe bezeichnen wir eine physikalische oder geometrische Größe, deren Komponenten sich beim Übergang von einem Koordinatensystem KS zu dem System KS' folgendermaßen verhalten:

$$T^{i'j'k'\cdots} = A^{i'}{}_{l}\; A^{j'}{}_{m} A^{k'}{}_{n} \cdots \; T^{lmn\ldots} \quad , \tag{1}$$

wobei $A^{i'}{}_{l}$ die Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation darstellt,

$$A^{i'}{}_{l} = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^{l}} \quad . \tag{2}$$

Für die kovarianten oder gemischten Komponenten gelte natürlich das entsprechende Transformationsverhalten.

Zeigen Sie:

(a) Wenn T_{ij} symmetrisch ist, dann ist auch T^{ij} symmetrisch.

(b) Wenn $T^{ij\cdots}$ ein Tensor und $T^{ij\cdots}\, N_{ij\ldots}$ eine Invariante ist, dann ist $N_{ij\ldots}$ ebenfalls ein Tensor. Dies bezeichnet man auch als den *Quotientensatz*.

(c) Die Spur des Produktes aus einem symmetrischen und einem antisymmetrischen Tensor ist null.

(d) Wir betrachten die Größe

$$T_{ij} = \int a(\underline{x})\left(x_i x_j - c\, r^2 \delta_{ij}\right) dV \quad , \tag{3}$$

wobei sich für $a(\underline{x}) = \rho_c(\underline{x})$ (Ladungsdichte) und $c = 3$ das Quadrupolmoment, sowie für $a(\underline{x}) = -\rho_m(\underline{x})$ (Massendichte) und $c = 1$ der Trägheitstensor ergeben. Betrachten Sie Transformationen innerhalb euklidischer Räumen und zeigen Sie, dass T_{ij} ein Tensor ist.
Bemerkung: T_{ij} ist *kein* Riemann-Tensor.

Bitte wenden ⟶

8. **Rechenbeispiele: Metrischer Tensor und elektromagnetischer Feldstärketensor**

Wir betrachten die Transformation von kartesischen Koordinaten zu Zylinderkoordinaten.

(a) Rechnen Sie explizit nach, dass sich der metrische Tensor wie ein Tensor transformiert.

(b) In einem kartesischen Koordinatensystem sei das Magnetfeld

$$\underline{B} = \frac{B_0}{x^2 + y^2} \left(-y\, \underline{e}_x + x\, \underline{e}_y\right) \quad ; \quad x^2 + y^2 \neq 0$$

gegeben.

i. Zeigen Sie, dass sich das Feld in Zylinderkoordinaten als $\underline{B} = B_0\, \frac{1}{r}\, \underline{e}_\varphi$ schreiben lässt.

ii. In der SRT haben wir jedoch für die Transformation der elektromagnetischen Felder zwischen sich relativ zueinander bewegenden Inertialsystemen den Feldstärketensor $\mathcal{B}_{mn}$ eingeführt. Die Tensordarstellung der Maxwelltheorie sollte jedoch auch noch die einfache Transformation zwischen kartesischen und Zylinderkoordinaten beinhalten. Bestimmen Sie daher die Komponenten $\mathcal{B}_{m'n'}$ für die Transformation

$$(x^1, x^2, x^3, ct) \;\rightarrow\; (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z, ct) \quad .$$

iii. Benutzen Sie die Beziehungen

$$\mathcal{B}_{mn} = \mathcal{A}_{n|m} - \mathcal{A}_{m|n} \qquad \text{und} \qquad \underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A} \qquad \text{mit} \qquad \underline{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) \tag{4}$$

und reproduzieren Sie damit Ihr Ergebnis aus (i).