INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE WS 2012/2013

2. Übungsblatt Besprechung: 25. Oktober 2012

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

4. **Ebene Polarkoordinaten als Beispiel krummliniger Koordinaten**

   In dieser Aufgabe soll das Rechnen mit krummlinigen Koordinaten am Beispiel ebener Polarkoordinaten wiederholt und geübt werden.

   (a) Formulieren Sie die Umrechnung der kovarianten Basen $\{\underline{b}_r, \underline{b}_\theta\}$ und kontravarianten Basen $\{\underline{b}^r, \underline{b}^\theta\}$ in ebenen Polarkoordinaten (r, φ) aus den kartesischen Koordinaten (x^1, x^2).

   (b) Erklären Sie anschaulich, was man unter den kovarianten und kontravarianten Basen in Polarkoordinaten versteht.

   (c) Berechnen Sie alle Elemente des metrischen Fundamentaltensors $g_{ij} = \underline{b}_i \cdot \underline{b}_j$ und das Linienelement $ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j$ in Polarkoordinaten.

   (d) Berechnen Sie die kovarianten und kontravarianten Komponenten des Gradienten eines Skalarfeldes ∇f. Füllen Sie die folgende Tabelle aus.

	kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten
kovariante Komponenten $(\nabla f)_i$	$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$	(,)
kontravariante Komponenten $(\nabla f)^i$	(,)	(,)

5. **Tensoren**

   Als einen Tensor n-ter Stufe bezeichnen wir eine physikalische oder geometrische Größe, die sich beim Übergang von einem Koordinatensystem KS zu dem System KS' folgendermaßen verhält:

$$T^{i'j'k'\dots} = J^{i'}_{\ l}\, J^{j'}_{\ m} J^{k'}_{\ n} \cdots\ T^{lmn\dots} \quad , \tag{1}$$

   wobei $J^{i'}_{\ l}$ die Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation darstellt,

$$J^{i'}_{\ l} = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^l} \quad . \tag{2}$$

   Für die kovarianten oder gemischten Komponenten gelte natürlich das entsprechende Transformationsverhalten.

   Zeigen Sie:

   (a) Wenn T_{ij} symmetrisch ist, dann ist auch T^{ij} symmetrisch.

(b) Wenn $T^{ij\cdots}$ ein Tensor und $T^{ij\cdots}\,N_{ij\ldots}$ eine Invariante ist, dann ist $N_{ij\ldots}$ ebenfalls ein Tensor. Dies bezeichnet man auch als den *Quotientensatz*.

(c) Die Spur des Produktes aus einem symmetrischen und einem antisymmetrischen Tensor ist null.

6. **Lokales Inertialsystem I**

In der Vorlesung wurde gesagt, dass das Lokale IS so weit ausgedehnt werden kann, wie es noch 'klein' gegenüber der Inhomogenität des Gravitationsfeldes ist. Dieses 'klein' wollen wir nun näher quantifizieren. Wir betrachten dazu zwei Körper m_1 und m_2, die im inhomogenen Gravitationsfeld einer Punktmasse M radial auf diese zufallen. Die Abstände der Körper von der Punktmasse seien $r_1(t)$ und $r_2(t) = r_1(t) + d(t)$.

(a) Zeigen Sie, dass sich aus der Newtonschen Bewegungsgleichung für kleine d näherungsweise

$$\ddot{d} = \frac{2GM}{r_1^3} d \tag{3}$$

ergibt.

(b) Zeigen Sie weiterhin, dass sich der Abstand d der beiden Körper während einer kurzen Zeit t um

$$\Delta d = \frac{GM}{r_1^3}\, t^2\, d_0 \tag{4}$$

ändert, wobei $d_0 = di(0)$. Zudem können Sie annehmen, dass sich die Körper zur Zeit $t = 0$ in Ruhe befinden.

(c) Berechnen Sie Δd für ein Labor der Größe 50 m auf der Erdoberfläche und eine Zeit von 2s.