Mikromechanisch begründete Modellbildung des thermo-mechanischen Werkstoffverhaltens von Asphalt

Tobias Dominic Blume

Institut für Statik Technische Universität Braunschweig

Bericht Nr. 2018-121

Mikromechanisch begründete Modellbildung des thermo-mechanischen Werkstoffverhaltens von Asphalt

Von der

Fakultät für Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines Doktoringenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte

Dissertation

von Tobias Dominic Blume geboren am 6. Mai 1985 aus Braunschweig

Eingereicht am:	24. Mai 2017
Disputation am:	$21. November \ 2017$

Berichterstatter/in:	Prof. DrIng. D. Dinkler
	Prof. Dr. T. Sonar

ISBN 978-3-926031-22-8

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler ©Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 2018

Kurzfassung

In der Arbeit ist ein Verbundmodell für die Analyse von Asphaltwerkstoffen im Straßenwesen entwickelt. Der Asphalt ist mit den Komponenten Bitumen, Mineralstoff und Luftporenraum beschrieben. Das Verbundmodell ist aus mikromechanischen Konzepten der Kontinuumsmechanik erarbeitet. Aus den verschiedenen Konzepten sind analytische Ansätze für die Homogenisierung untersucht und es wird zur Beschreibung der Asphaltmischung das *Generalized Self-Consistent Scheme* als am geeignetsten identifiziert.

Der Mineralstoff ist vereinfacht mit einem linear-elastischen Spannungs-Dehnungs-Verhalten berücksichtigt, da die Struktur des Korngerüsts bereits implizit dem Generalized Self-Consistent Scheme zugrunde liegt. Die Sieblinie wird durch das Kornvolumen beschrieben. Das Werkstoffmodell für das Bitumen ist mit fraktionalen Zeitableitungen formuliert. Das Konzept fraktionaler Ableitungen ermöglicht die Modellierung des Bitumens mit einem fraktionalen rheologischen Element, dem fraktionalen Maxwell-Modell. Die Werkstoffeigenschaften sind in Abhängigkeit der Spannung und Temperatur formuliert. Mit der verwendeten Grünwald-Reihenentwicklung für die Beschreibung fraktionaler Ableitungen der Differentialgleichungen des Bitumenmodells wird das Homogenisierungsverfahren auf inelastische Dehnungen im Zeitbereich übertragen. Die Methodik wird mit der klassischen Methode des elastisch-viskoelastischen Korrespondenzprinzips für die Homogenisierung inelastischen Werkstoffverhaltens verglichen. Dabei wird gezeigt, dass die notwendige Transformation und numerisch aufwändige Rücktransformation in den Laplace-Raum entfallen kann, da die Lösung bei reduziertem numerischen Aufwand im Zeitbereich näherungsweise identisch ist.

Sowohl das Bitumenmodell wie auch das Verbundmodell für den Asphalt sind an vorliegenden Versuchsdaten validiert. Es werden verschiedene Modellerweiterungen diskutiert. Das vorhandene Modell wird anschließend um die Komponente adsorbiertes Bitumen ergänzt, wodurch die chemische Reaktion mit dem Korn und daraus resultierend veränderte Werkstoffeigenschaften berücksichtigt sind. Die Simulationsergebnisse werden mit der Erweiterung signifikant verbessert. Im Rahmen der Versuchsbeschreibung ist die experimentelle Vorgehensweise kritisch betrachtet und Optimierungsmöglichkeiten vorgestellt. Abschließend sind Asphaltrezepturen nach Norm untersucht und die Ergebnisse diskutiert.

Abstract

In this thesis, a composite material model for the numerical analysis of asphalt in road construction is developed. The asphalt mixtures are defined by its components. These are aggregates, bituminous binders and pore space. The composite model is developed by using micromecanical concepts as part of a continuum mechanical approach. From the different concepts, the *Generalized Self-Consistent Scheme* has proven to be most fit for describing the problem.

The aggregates are described by a linear-elastic material model, as the underlying aggregate structure is implicitly specified within the *Generalized Self-Consistent Scheme*. The grading curve is described by the volume fractions of the aggregates. The material model of the bituminous binders is formulated with a fractional derivative approach in time. For the bituminous binders, the fractional calculus enables a material model formulation with only one rheological fractional element, the fractional Maxwell-model. The material properties are dependent on the temperature and stress levels. To describe the inelastic behaviour of the asphalt, the homogenisation scheme is extended into the time domain by using the Grünwald-series as formulation of the fractional derivative. The method is compared with the elastic-viscoelastic correspondence principle for the evaluation of inelastic homogenisation. It is shown that the high numerical effort of the backtransformation from the Laplace space can be omitted, as the solution directly in the time domain is a valid approximation.

The model for the bituminous binders as well as the model for the asphalt is validated by various experiments. Different model extensions are discussed and the model is extended by a layer of absorbed bitumen afterwards. This considers the chemical alteration of the bitumen for the material properties. Improvements for the experimental validation are discussed and finally different norm asphalt mixtures are analyzed and the results discussed.

Inhaltsverzeichnis

Sy	mbol	erzeichnis	111
1	Einle	tung	1
2	Aspl	alt im Straßenwesen	3
	2.1	Normen und Regelwerke	4
	2.2	Stand der Forschung	5
		2.2.1 Makroskopische Modelle	6
		2.2.2 Mikromechanische Modelle	8
3	Min	ralstoff	12
	3.1	Korneigenschaften	12
	3.2	Korngerüst	13
		3.2.1 Grundlagen granularer Packungen	14
		3.2.2 Sieblinie	14
	3.3	Werkstoffmodell Korn	17
4	Bitu	nen	19
	4.1	Chemische Zusammensetzung	19
	4.2	Bitumenstruktur	22
	4.3	Werkstoffmodell Bitumen	24
		4.3.1 Die fraktionale Integral- und Differantialrechnung	25
		4.3.2 Das fraktionale rheologische Element	28
		4.3.3 fading memory und nested mesh-Prinzip	29
		4.3.4 Das fraktionale Maxwell-Modell	31
		4.3.5 Newton-Raphson Verfahren	33
		4.3.6 Temperaturabhängige Viskosität	34
		4.3.7 Mehraxiale Erweiterung	35
	4.4	Bestimmung der Modellparameter	38
		4.4.1 Evolutionsstrategie	38
		4.4.2 Experimentelle Untersuchung von Bitumen	39
5	Einfi	hrung in die Homogenisierung	47
	5.1	Grundlagen	48
		5.1.1 Homogenisierungsmethoden	48
		5.1.2 Die Eshelby-Lösung	50
		5.1.3 Volumenmittelwerte und die Hill-Bedingung	51

		5.1.4	Effektive Materialeigenschaften	52
	5.2	Homo	genisierungsverfahren	54
		5.2.1	Voigt- und Reuss-Schranken	54
		5.2.2	Hashin-Shtrikman-Variationsprinzip	55
		5.2.3	Dünne Defektverteilung	56
		5.2.4	Mori-Tanaka-Modell	57
		5.2.5	Generalisierte Selbstkonsistenzmethode	58
		5.2.6	Vergleich der Verfahren	62
	5.3	Erweit	erung auf inelastische Verformungen	64
		5.3.1	Linearisierungsmethoden	64
		5.3.2	Anwendung für das fraktionale Element	65
6	Aspl	nalt		68
6	Aspl 6.1	n <mark>alt</mark> Bestin	nmung der Volumenanteile	68 68
6	Aspl 6.1 6.2	n alt Bestin Homo;	nmung der Volumenanteile	68 68 69
6	Aspl 6.1 6.2 6.3	n alt Bestin Homo Exper	nmung der Volumenanteile	68 68 69 70
6	Aspl 6.1 6.2 6.3 6.4	n alt Bestin Homog Exper Diskus	nmung der Volumenanteile	68 68 69 70 30
6	Aspl 6.1 6.2 6.3 6.4	Bestin Bestin Homoj Exper Diskus 6.4.1	nmung der Volumenanteile	68 69 70 80 30
6	Aspł 6.1 6.2 6.3 6.4	Bestin Homo; Exper Diskus 6.4.1 6.4.2	amung der Volumenanteile	68 69 70 80 30 31
6	Aspł 6.1 6.2 6.3 6.4	Bestin Homo Exper Diskus 6.4.1 6.4.2 Aspha	amung der Volumenanteile	68 69 70 80 80 81 31
7	Aspł 6.1 6.2 6.3 6.4 6.5 Zusa	Bestin Homo Exper Diskus 6.4.1 6.4.2 Aspha	amung der Volumenanteile	68 69 70 80 81 87 92

Symbolverzeichnis

Notation

$J(\cdot)$	Kriechfunktion abhängig von (\cdot)
$f(\cdot)$	Funktion f , abhängig von (\cdot)
$D^{\alpha}(\cdot)$	Ableitung von (\cdot) der Ordnung α
Δ	Inkrement
$(\hat{\cdot})$	Randbedingung
$\langle \cdot \rangle$	Volumenmittelwert
\mathcal{L}	LAPLACE-Operator

Skalare

α_T	${ m W}\ddot{ m a}{ m rmeausdehnkoeffizient}$
c	Volumenanteil
d	${ m Korndurchmesser}$
D	Steuervariable Randbedingungen
e	Porenzahl
I_2	2. Invariante
l	Seitenlänge RVE
L	Seitenlänge Makroebene
N_t	Anzahl Stützstellen nested-mesh
t	Zeit
θ	Temperatur
ξ	Faktor Eshelby-Tensor, volumenkonstant
χ	Faktor Eshelby-Tensor, deviatorisch
\overline{V}	Volumen
w	Grünwald-Gewicht

Vektoren und Matrizen

- \mathbf{C} Elastische Steifigkeitsmatrix
- D Deviatormatrix
- ε Verzerrungsvektor
- ė Verzerrungsratenvektor
- J Ableitungsmatrix
- \mathbf{K} Kugelmatrix
- Vektor der Residuen \mathbf{r}
- Spannungsvektor σ
- Deviatorischer Spannungsvektor \mathbf{S}
- Vektor der Zustandsgrößen z

Tensoren

- ϵ Verzerrungstensor 2. Stufe
- Σ Spannungstensor 2. Stufe
- Einflusstensor 4. Stufe, Verzerrung A
- B Einflusstensor 4. Stufe, Spannung
- \mathbb{C} Elastizitätstensor 4. Stufe
- Π Einheitstensor 4. Stufe
- S Eshelby-Tensor 4. Stufe

Materialkennwerte

- Ableitungsordnung α
- Elastizitätsmodul E
- Viskosität η
- KKompressionsmodul
- Schubmodul μ
- nExponent
- Querdehnzahl ν
- Temperaturabhängige Parameter q

Kopfzeiger

- $\begin{array}{c} \left(\cdot \right)^{\mathrm{t}} \\ \left(\cdot \right)^{T} \end{array}$ Äquivalente Eigendehnung
- Transponiert

Fußzeiger

- $(\cdot)_{ad}$ Adsorbiert
- $(\cdot)_{\rm bit}$ Bitumen
- $(\cdot)_{\rm eff}$ Effektiv
- $(\cdot)_{el}$ Elastisch
- $(\cdot)_{\rm F}$ Füller
- $(\cdot)_{i,j,k}$ Zähler
- $(\cdot)_{I}$ Inhomogenität/Einschluss
- $(\cdot)_{\rm M}$ Matrix
- $(\cdot)_{\rm P}$ Porenraum
- $(\cdot)_{\rm r}$ Rest
- $(\cdot)_{v}$ Vergleichsspannung
- $(\cdot)_{vp}$ Viskoplastisch
- $(\cdot)_0$ Bezugsgröße

1 Einleitung

Der Bau, die Instandhaltung sowie die Nutzung von Straßen ist für ein Industrieland wie Deutschland ein bedeutender Wirtschaftsfaktor. Zum einen sind Bau und Instandhaltung Kosten- und Zeitintensiv, zum anderen folgt die Nutzung volkswirtschaftlichen Interessen. Als Transitland mit zentraler Lage in Europa entsteht eine zusätzliche Belastung durch den innereuropäischen Warenund Personenverkehr, insbesondere durch den Schwerlastverkehr. Die hohe Ausnutzung der Verkehrswege setzt standfeste und dauerhafte Straßenquerschnitte voraus. Unabhängig von der Bauart sind sie unterschiedlichen Belastungen ausgesetzt. Neben der mechanischen Einwirkung aus Überfahr-, Brems- und Anfahrvorgängen wirken weitere physikalisch-chemische Belastungen wie zum Beispiel UV-Strahlung und Tausalz auf die Straßenkörper ein. Um die Dauerhaftigkeit zu gewährleisten muss der Ingenieur mit geeigneten Werkstoffmodellen und Berechnungsmethoden die langfristigen Auswirkungen prognostizieren können. Eine gute Prognose gibt sowohl der öffentlichen Hand als Auftraggeber wie auch den ausführenden Firmen eine größere Planungssicherheit. Auf Auftraggeberseite können die notwendigen Mittel für Bau und Instandhaltung rechtzeitig in den öffentlichen Haushalt einkalkuliert und bereitgestellt werden. Die ausführenden Firmen hingegen erhalten ein besseres Werkzeug für die Bemessung und der Bewertung von Risiken während der langjährigen Gewährleistungsfristen.

Im modernen Straßenbau wird im Wesentlichen Asphalt als Baustoff verwendet. Aufwendige Versuche zur Kontrolle des Mischgutes sind notwendig, um die Eigenschaften des Asphalts zu bestimmen und die geforderte Qualität zu gewährleisten. Mit abgesicherten Werkstoffmodellen kann dieser Aufwand minimiert und die Bemessung verbessert werden. Dabei wird in den geltenden Normen das nichtlineare Materialverhalten des bituminösen Bindemittels nicht berücksichtigt. Die Entwicklung geeigneter Materialmodelle, welche das thermo-mechanische Verformungsverhalten gut beschreiben ist deshalb sinnvoll. In Kapitel2 werden aktuelle Entwicklungen zusammengefasst sowie die Anforderungen der geltenden Normen diskutiert.

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines mikromechanisch begründeten Werkstoffmodells welches das thermo-mechanische Verformungsverhalten von Asphalt beschreibt. Um die Beschreibung der Mischung und den Einfluss der Mischungsanteile zu berücksichtigen, sind als Eingangsgrößen des Modells die Asphaltbestandteile Mineralstoff, Bindemittel und Luftporenraum gewählt. Dazu ist das Materialverhalten der Komponenten und des Gemischs im Rahmen der Kontinuumsmechanik zu beschreiben. Die mineralischen Zuschläge sind in Kapitel 3 dargestellt. Die Beschreibung der Zuschläge mit der Sieblinie sowie Einflüsse der Sieblinie auf die Packung werden im Detail erläutert. Kapitel 4 beschreibt die Ursachen des temperaturabhängigen Verformungsverhaltens für das Bindemittel. Das Werkstoffmodell berücksichtigt die interne Struktur des Bindemittels und verwendet fraktionale Ableitungen für die Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Verformungen. Experimentelle Untersuchungen werden für die Validierung der Modellgleichungen und Modellparameter verwendet.

Die Steifigkeit der Asphaltmischung wird mit mikromechanischen Verfahren bestimmt. Eine Einführung und Diskussion ausgewählter Methoden werden in Kapitel 5 angegeben und auf ihre Eignung für die Modellierung des Verformungsverhaltens von Asphalt untersucht. Ein geeignetes Verfahren wird daraufhin für die Entwicklung des Verbundmodells in Kapitel 6 verwendet. Anhand weiterer Versuche wird die Prognosequalität des Verbundmodells bewertet. Beispielhaft wird das Verformungsverhalten verschiedener Asphaltsorten numerisch untersucht und im Vergleich mit experimentellen Ergebnissen kritisch evaluiert. Die Grenzen der einzelnen Werkstoffmodelle wie auch des Verbundmodells werden aufgezeigt und mögliche Erweiterungen diskutiert.

2 Asphalt im Straßenwesen

Im Straßenbau sind bitumengebundene Bauweisen etabliert. Beton- und Pflasterbauweisen stellen nur noch einen kleinen Prozentteil dar. Der gebundene Oberbau besteht aus Deck-, Trag- und ggf. Binderschichten. Im Verbund haben die Schichten unterschiedliche Aufgaben. Asphaltdeckschichten erfordern einen hohen Widerstand gegen Abrieb und Spurrinnenbildung. Binderschichten sind so auszubilden, dass sich Spurrinnen nicht in die tieferen Schichten fortsetzen. Dies wird vor allem durch eine sehr hohe Steifigkeit erreicht. Die Tragschicht hat schließlich die Aufgabe die Lasten in den Boden einzuleiten.

Entscheidend für die Erfüllung der genannten Aufgaben des gebundenen Oberbaus ist die Asphaltmischung. Ausgangsmaterial ist ein Korngerüst, dessen Sieblinie je nach Verwendungszweck variiert. Asphalt ist anhand der Sieblinie in verschiedene Kategorien einzuordnen. Asphaltbetone (AC) weisen eine eng gestufte Korngrößenverteilung auf, die eine sehr dichte Packungsdichte ermöglicht. Splittmastixasphalt (SMA) und offenporiger Asphalt (OPA) sind durch Ausfallkörnungen gekennzeichnet. Dadurch entstehen Hohlräume, welche bei Splittmastixasphalt mit Feinkorn gefüllt sind, während die Hohlräume im offenporigen Asphalt der Reduktion der Schallemissionen von überfahrenden Fahrzeugen dienen. Splittmastixasphalt und offenporiger Asphalt werden in der Regel nur als Deckschichten eingebaut. Gussasphalt (GA) weist eine ähnliche Sieblinie wie Asphaltbeton auf. Das Bitumenvolumen übersteigt jedoch das des Hohlraumvolumens, so dass die Körner im Bitumen "schwimmen". Ein zusammenhängendes Korngerüst besteht nicht. Üblicherweise werden für Gussasphalte harte Bitumen verwendet, um den Lastabtrag zu verbessern.

Das im Straßenbau verwendete Bitumen ist ein Nebenprodukt der Erdölraffination. Maßgebend ist die Härte des Bitumens. Gemessen wird diese mit dem Nadelpenetrationsversuch, bei dem eine Nadel mit definierter Kraft in das Bitumen gedrückt wird. Die Eindringtiefe gibt Aufschluss über die Härte. In AC, SMA und OPA verklebt das Bitumen die einzelnen Körner zu einem standfesten Korngerüst. Für besondere Anforderungen können durch Zugabe von ausgewählten Polymeren die Eigenschaften des Bitumens angepasst werden. Man spricht dann von polymermodifizierten Bitumen (PmB). Das Bitumen bestimmt die komplexen thermo-mechanischen Eigenschaften des Asphalt.

Die Betrachtung von Asphalt als granularer Kompositwerkstoff eröffnet eine Vielzahl von Möglichkeiten das Werkstoffverhalten bis ins Detail zu beschreiben. Die in der Norm verwendeten Materialmodelle sind dagegen den baupraktischen Erfordernissen entsprechend stark vereinfachend und berücksichtigen nicht das ratenabhängige, thermo-mechanische Spannungs-Dehnungs-Verhalten.

2.1 Normen und Regelwerke

Die Bemessungregeln im Straßenbau sind nicht wie andere Bemessungsregeln im Bauwesen mit dem Eurocode geregelt, sondern weiterhin in nationalen Regelwerken. Dazu gehören Richtlinien für die Trassenplanung und den Querschnittsentwurf. Ergänzt werden diese durch technische Lieferbedingungen (TL) und zusätzliche technische Vertragsvorschriften (ZTV).

Richtlinien für die Standardisierung des Oberbaus von Verkehrsflächen (RStO)

Die RSTO 12- RICHTLINIEN FÜR DIE STANDARDISIERUNG DES OBERBAUS VON VERKEHRSFLÄCHEN [30] ist die Grundlage der Bemessung von Straßenkörpern in Deutschland. Die Bemessung gliedert sich in die Bemessung des frostsicheren Oberbaus sowie die Ermittlung der Belastungsklasse auf. Beide Teile haben Einfluss auf die bauliche Durchbildung des gebundenen Oberbaus, siehe Abbildung 2.1. Die Querschnitte sind auf der Grundlage empirischer Werte aus der Bau- und Nutzungsphase, ergänzt durch wissenschaftliche Untersuchungen zum mechanischen Verhalten der verschiedenen Bauweisen, entwickelt. Die RSTO behandelt den Neubau sowie die Ertüchtigung von Straßenquerschnitten. Die empfohlenen Bauweisen teilen sich auf in Asphalt-, Beton- und Pflasterbauweisen. Nach RSTO 12 sind Asphalt- und Betondecken hinsichtlich ihres Tragverhaltens und ihrer Nutzungsdauer als weitgehend gleichwertig anzusehen.

Abbildung 2.1 zeigt die Einteilung des Straßenquerschnitts für die Bemessung. Bodenklassifizierung, Frosteinwirkungszone, Lage der Gradienten und Trasse, Wasserverhältnisse und Ausführungsart der Randbereiche haben Einfluss auf die Dicke des frostsicheren Oberbaus. Jeder der genannten Einflussfaktoren erfordert eine Erhöhung oder Reduktion der Schichtdicke des frostsicheren Oberbaus.



Abbildung 2.1: Straßenaufbau nach RSTO 12

Die Belastungsklasse wird anhand der dimensionierungsrelevanten Beanspruchung ermittelt. Maßgebend für die Belastungsklasse ist der Schwerlastverkehr. Die dimensionierungsrelevante Beanspruchung wird in äquivalenten 10-t-Achsübergängen angegeben. Einfluss darauf nehmen die Achszahl, das Lastkollektiv, Anzahl und Breite der Fahrstreifen, die Steigung des Straßenverlaufs und die erwartete jährliche Zunahme des Schwerlastverkehrs.

Richtlinien für die rechnerische Dimensionierung des Oberbaus von Verkehrsflächen mit Asphaltdeckschicht (RDO)

Seit 2009 erlaubt die RDO 09-RICHTLINIEN FÜR DIE RECHNERISCHE DIMENSIO-NIERUNG DES OBERBAUS VON VERKEHRSFLÄCHEN MIT ASPHALTDECKSCHICHT [29] die Untersuchung von Oberbauten mit numerischen Modellen. Die Wahl des Straßenaufbaus ist weiterhin nach RSTO zu wählen. Die Schichtdicken dürfen jedoch anhand der Berechnungsergebnisse angepasst werden. Die Berechnungen sind auf linear-elastisches Werkstoffverhalten mit Anwendung der Mehrschichtentheorie beschränkt. Die Randbedingungen der Mehrschichtentheorie sind jedoch in Straßenkörpern üblicherweise nicht erfüllt und linear-elastisches Werkstoffverhalten kann Langzeiteinflüsse nicht realitätsnah beschreiben. Die RDO verweist darauf, dass weitere Werkstoffmodelle zugelassen werden können, was bisher noch nicht erfolgt ist. Dies zeigt jedoch, dass der Gesetzgeber sich des Problems bewusst ist und die Entwicklung geeigneter Werkstoffmodelle für aussagekräftige numerische Berechnungen für sinnvoll erachtet.

Nach RDO sind von der RSTO abweichende Nachweise zu führen. Asphaltdeck- und Asphaltbinderschichten sind auf Spurrinnengefährdung nachzuweisen, die Asphalttragschicht und Tragschichten mit hydraulischen Bindemitteln auf Ermüdung. In Tragschichten ohne Bindemittel und im Unterbau ist nachzuweisen, dass die plastischen Verformungen die vorgegebenen Grenzwerte nicht überschreiten.

Ergänzt werden die RSTO und RDO durch die Technische Lieferbedingungen für Asphaltmischgut für den Bau von Verkehrsflächenbefestigungen [31] und die Zusätzliche Technische Vertragsbedingungen und Richtlinien für den Bau von Verkehrsflächenbefestigungen aus Asphalt [32] welche Güte und Prüfverfahren für Asphaltwerkstoffe behandeln.

2.2 Stand der Forschung

Die kritische Auseinandersetzung mit der Norm zeigt die Notwendigkeit der Entwicklung von leistungsfähigen Werkstoffmodellen, welche die thermo-mechanischen Verformungseigenschaften von Asphaltkörpern quantitativ beschreiben können. Numerische Analysen mit der Finite-Element-Methode (FEM) ermöglichen die realitätsnahe Beschreibung verschiedener Straßenquerschnitte und Belastungsverläufe. Prognosen der Lebensdauer sowie die Dimensionierung von Straßenquerschnitten lassen sich damit optimieren, sodass wirtschaftlichere und nachhaltigere Bauweisen möglich sind.

Die Asphaltforschung ist ein breites wissenschaftliches Feld, das versucht die vielen, teilweise gekoppelten Prozesse in Asphalt zu beschreiben. Dabei ist es häufig nicht möglich alle Einflüsse zu berücksichtigen, so dass moderne Werkstoffmodelle immer einen Kompromiss zwischen Aussagekraft und Berechnungsaufwand darstellen. Die im folgenden vorgestellten Modelle zeigen Trends und Tendenzen aktueller Forschung und haben keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Eine Übersicht ist in Tabelle 2.1 am Ende des Kapitels angegeben.

2.2.1 Makroskopische Modelle

Die Beschreibung des Werkstoffverhaltens von Asphalt, der aus mehreren Komponenten besteht, lässt verschiedene Ansätze der Modellbildung zu. Zum Einen kann der Werkstoff als ein homogenes Material und auf der Makroebene betrachtet werden. Für die Modellbildung werden zum Beispiel rheologische Körper verwendet. Durch eine geeignete Kombination von rheologischen Grundkörpern kann eine Vielzahl von beobachteten Phänomenen beschrieben werden. Rheologische Grundelemente sind zum Beispiel Feder, Dämpfer und Reibelement.

Ein rheologisches Modell, welches die auftretenden viskoelastischen und viskoplastischen Verformungsanteile von Asphalt beschreibt ist das Burgers-Modell. Es besteht aus einer Parallelschalt ung von Feder und Dämpfer. Diese sind erneut mit einer Feder und einem Dämpfer in Reihe angeordnet. GARTUNG [37] verwendet den Burgerskörper und erweitert ihn um einen Verfestigungsansatz nach CHABOCHE [18]. Zusätzlich wird im Zugbereich Schädigung als skalare Größe nach KACHANOV/RABOTNOV [82] eingeführt. Für die Begrenzung der Spannungen wird die Fließhypothese nach v. Mises angesetzt. Im Druckbereich wird als Fließregel die für Böden bekannte Regel von Drucker-Prager verwendet und bei hohen Temperaturen können Heilungsprozesse auftreten. Das Modell ist nichtlinear und temperaturabhängig formuliert. MOLLENHAUER [66] beschreibt mit dem Burgersmodell das Ermüdungsverhalten bei tiefen Temperaturen. Dafür wird ein umfangreiches Versuchsprogramm aus Zug-, Zug-Schwell- und Zug-Abkühlversuchen ausgewertet. Die auftretenden Schädigungen werden der Materialermüdung und nicht den Dehnungen zugeordnet. Die Ermüdung wird durch funktionale Zusammenhänge beschrieben, die eine Prognose ermöglichen. Die Schädigung wird durch eine Reduzierung der Querschnittsfläche beschrieben. AFLAKI [2] beschreibt für tiefe Temperaturen Asphalt ebenfalls mit dem Burgersmodell. Ziel ist es den Einfluss von Modifikationen in der Asphaltmischung zu zeigen. Es wird gezeigt, dass sich die Zugabe von recyceltem Gummigranulat aus Fahrzeugreifen positiv auf den Verformungswiderstand auswirkt.

Neben dem Burgersmodell werden in der Literatur weitere rheologische Modelle vorgestellt, welche das zeitabhängige Verformungsverhalten von Asphalt beschreiben können. XUETAL. [107] vergleichen eine Auswahl an Modellansätzen hinsichtlich der Prognosegenauigkeit des sogenannten "komplexen E-Moduls". Aus den untersuchten Modellen wird das HUET-SAYEGH-Modell [45] zur Beschreibung linearer Viskoelasitzität als geeignet identifiziert. Das Modell besteht aus zwei mit einer Feder in Reihe geschalteten fraktionalen Dämpfern. Diese sind wiederum mit einer Feder parallel geschaltet. Ausgewertet werden zyklische Druckversuche bei verschiedenen Temperaturen. Die Frequenz-Temperaturäquivalenz wird in Masterkurven angegeben.

Die zyklische Beanspruchung hat einen großen Einfluss auf die Standsicherheit von Asphalt und ihre Modellierung eine entsprechend große Bedeutung. Aus der Bodenmechanik ist das Konzept der zyklischen Mobilität für granulare Medien bekannt. GAJÁRI [35] untersucht die Ursache der Spurrinnenbildung hinsichtlich dieses Konzepts. Als Werkstoffmodell wird das hypoplastische Werkstoffmodell nach V. WOLFFERSDORFF [103, 104] verwendet, dem ein Dämpferelement parallel geschaltet wird um viskose Verformungen beschreiben zu können. Die Modelle werden mit einem umfangreichen Versuchsprogramm validiert. DARABIETAL. [23] entwickeln ein Modell für zyklische Verfestigungs-Relaxationsprozesse bei hohen Temperaturen. Ziel ist die numerische Simulation von Spurrinnenbildung. Grundlage ist das viskoplastische Werkstoffmodell mit Überspannungen nach PERZYNA[75]. Das Modell wird mit dem nichtlinearen viskoelastischen Werkstoffmodell nach SCHAPERY [89] kombiniert. Für die Verfestigungs-Relaxationsprozesse wird eine Gedächtnisfläche im viskoplastischen Spannungs-Dehnungsverhalten eingeführt. Die Gedächtnisfläche definiert die Verformungsgeschichte als Initialisierungskriterium der plastischen Verformungen. Begründet wird das Vorgehen mit Änderungen der internen Struktur während der Belastungsphase. Der Vergleich mit vorliegenden Experimenten zeigt, das die Berechnungsergebnisse durch die Einführung der Gedächtnisfläche verbessert werden.

Asphalt wird makroskopisch als isotropes Material dargestellt. Bedingt durch Form und Lage der eingebauten Körner ist eine Anisotropie jedoch nicht auszuschließen. Yu [108] untersucht die Schädigungsentwicklung unter Scherbeanspruchung. Die anisotrope Schädigung wird dabei durch die generalisierte, tensorielle Form nach Kachanov und Rabotnov beschrieben. Die Schädigungsgrenzfläche variiert dabei je nach Asphaltprobe. Zur Beschreibung der nichtlinearen elastischen und viskoplastischen Verformungen wird das hyperelastische Werkstoffmodell nach Lade und Nelsen mit dem Perzyna-Modell verknüpft. UNDER-WOOD/KIM [100] untersuchen das Auftreten von Schädigung unter Zugebelastung. Die viskoelastischen Verformungen werden mit der *work-potential*-Theorie von SCHAPERY [90] formuliert. Mit dem ebenfalls von SCHAPERY [88] entwickelten *elastisch-viskoelastischen Korrespondenzprinzip* werden die Schädigungsansätze auf viskoelastisches Werkstoffverhalten übertragen.

Einen weiteren makroskopischen Ansatz verfolgt ZAHABI [110] mit der Prony-Reihe zur Beschreibung des viskoelastisch-viskoplastischen Werkstoffverhaltens. Ergänzt wird dieser durch empirische Gleichungen, die den Einfluss von Lage und Form der Körner beschreiben. Ziel ist die Beschreibung der Spurrinnenbildung. Zur experimentellen Validierung werden zyklische Versuche mit dem Scherrheometer durchgeführt.

KRISHNAN ET AL. [51] beschreiben das viskose, temperaturabhängige Deformationsverhalten von Asphalt mittels der Helmholtz-Energie in einer thermodynamisch konsistenten Formulierung. Es sind verschiedene Relaxationsmechanismen berücksichtigt, deren Ursachen sich auf die einzelnen Phasen im Bitumen beziehen. Die Auslöser sind unterschiedliche chemisch-physikalische Prozesse. Das Modell wird an Beispielen aus der Literatur validiert. POLACCO ET AL. [81] untersuchen den Einfluss der Polymere auf das Materialverhalten von polymermodifizierten Bitumen. Sie beschreiben den Zusammenhang zwischen der internen Struktur und den viskosen Verformungen des Bitumens mit Hilfe der Scherviskosität und des Relaxationsmoduls. POLACCO ET AL. schlagen vor, die Beschreibung mit rheologischen Modellen an die interne Struktur des Bitumens zu koppeln, um die phänomenologische Modellbildung um mikromechanisch fundierte Ansätze zu erweitern.

2.2.2 Mikromechanische Modelle

Die Beschreibung des Materialverhaltens auf der Makroebene hat den Nachteil, häufig nicht auf die Zusammensetzung und innere Struktur des Werkstoffs eingehen zu können. Die interne Struktur des Asphalts ist in vielen Fällen aber maßgebend für die Verformungs- und Schädigungsprozesse. Stoffmodelle, welche die Mikrostruktur beschreiben können und deren Eigenschaften auf die Makroebene transformieren können, ermöglichen einen besseren Zugang zu den heterogenen Werkstoffeigenschaften von Asphalt.

Eine Methode, die interne Struktur zu berücksichtigen, ist den makroskopischen Körper diskret zu modellieren. Dafür generieren leistungsfähige, teils kommerzielle Programme die Geometrie der Mikrostruktur. SHENOY [94] verwendet die Diskrete-Elemente-Methode (DEM), um Kornstrukturen aus verschiedenen Sieblinien zu beschreiben. Die Hohlräume sind mit Bitumen aufgefüllt und es werden verschiedene Belastungssituationen simuliert. Begleitend finden Versuchsreihen mit photoelastischen Materialien statt, die es erlauben die Spannungen in den in Bitumen eingebetteten Glaskugeln sichtbar zu machen. Die Arbeit zeigt wie sich die Lastpfade im Korngerüst entwickeln. SHENOY empfiehlt daraufhin die Modellierung von Asphalt als granularen Werkstoff und nicht als Kontinuum. SHEN/YU [93] untersuchen anhand von DEM-Berechnungen den Einfluss der Korngrößen, insbesondere wie sich die Sieblinie auf die Entwicklung der tragenden Struktur auswirkt. Dabei werden verschiedene Anteile der Sieblinie identifiziert, die sich positiv oder negativ auswirken. YU [109] erweitert die Modellgleichungen um die Berücksichtigung der Kornform. So können auch von der Kugelform abweichende Einschlüsse modelliert werden. Die Kontakte sind viskoelastisch formuliert und simulieren das Bitumen in den Zwischenräumen. Das Modell wird verwendet, um den Einfluss variierender Sieblinien auf den komplexen E-Modul zu untersuchen. Die Validierung erfolgt experimentell. Die Abweichung zwischen den Ergebnissen ist mit der fehlenden Rauheit der abgerundeten Körner begründet. Ein Berücksichtung von Kornverzahnungen ist damit nicht möglich. Auch SINGH ET AL. [95] untersuchen die Auswirkung der Sieblinie auf den Lastabtrag. Das Bitumen wird dabei durch ein Power-Law-Modell beschrieben. Das Modell bildet viskoplastisches Materialverhalten ab während das ellipsoide Korn als Starrkörper modelliert ist. Die Weiterentwicklung der Messtechnik ermöglicht es, die Geometrie von Asphaltproben dreidimensional mit einem Computertomographen zu erfassen. Die daraus gewonnenen geometrischen Daten werden für die Modellbildung mit der DEM verwendet, so zum Beispiel in [22], [59] und [38]. Auch wenn dies die zerstörungsfreie Untersuchung von Probekörpern erlaubt, müssen die Abmessungen der Proben in der Regel klein sein, um in einem Computertomographen untersucht werden zu können.

Inwiefern eine zweidimensionale oder dreidimensionale Modellierung Einfluss auf die Ergebnisse nimmt, untersucht TEHRANI [99]. Die Mikrostruktur ist mit einem repräsentativen Volumenelement abgebildet. Die Einschlüsse zeigen linear-elastisches Werkstoffverhalten während das Bitumen mit dem generalisierten Maxwell-Modell beschrieben ist. Die Ermittlung der Steifigkeiten erfolgt auf mehreren Ebenen. Ein Vergleich mit analytischen Homogenisierungsmethoden und Versuchsergebnissen zeigt, dass die Steifigkeit sowohl bei 2D- wie auch bei 3D-Berechnungen unterschätzt wird. Das Werkstoffmodell wird um eine Adsorptionsschicht am Korn erweitert. Diese beschreibt ein durch chemischen Austausch mit dem Korn verhärtetes Bitumen. Die Berechnungsergebnisse werden damit verbessert.

ASCHENBRENNER [6] verwendet einen kontinuumsmechanischen Ansatz. Dabei ermöglicht die Verwendung der Mischungstheorie die getrennte Berücksichtigung der Komponenten. Das Bitumen ist mit einem fraktionalen Burgerskörper beschrieben und gibt das nichtlineare, zeitabhängige Verformungsverhalten gut wieder. Das Modell ist um Schädigungsanteile nach KACHANOV/RABOTNOV [82] ergänzt, sowie um Heilungsprozesse als negative Schädigung. Das Luftporenvolumen ist als nicht tragend angenommen, durch die Volumenanteile aber in der Mischungstheorie berücksichtigt. Das Korngerüst ist mit dem Werkstoffmodell nach v. WOLFFERSDORFF [103] beschrieben. Die Modellparameter werden aus Mangel an Versuchen der jeweiligen Komponenten an Asphaltversuchen bestimmt. Die Auswirkung verschiedener Mischungsverhältnisse wird anhand von Simulationen gezeigt. Aufbauend auf dieser Arbeit erweitert BRODERSEN [13] die Beschreibung des Korngerüsts um intergranulare Dehnungen. Das Bitumen ist vereinfacht durch das fraktionale Maxwell-Modell formuliert. Zusätzlich wird ein Versuchsprogramm an den einzelnen Komponenten sowie an verschiedenen Asphaltmischungen durchgeführt. Sowohl die Modelle für die Beschreibungs des

Verformungsverhaltens der Komponenten als auch der Mischung werden validiert. OESER [72] erweitert die in der Mischungstheorie berücksichtigten Phasen um mit Dampf, Wasser und Eis gefüllte Porenräume. Die flüssigen und gasförmigen Phasen sind mit dem Darcy'schen Gesetz beschrieben. Die viskosen Eigenschaften des Bitumen sind mit einem fraktionalen Zener-Modell zweiter Ordnung formuliert, das aus einer Parallelschaltung von zwei fraktionalen Maxwellkörpern sowie einer Feder besteht. Die Mischung verhält sich anisotrop. Das Werkstoffmodell wird für verschiedene Temperaturen und Feuchtegehalte bei variierenden Überfahrgeschwindigkeiten für die numerische Berechnung einer Asphaltdeckschicht eingesetzt. Aufgrund fehlender Versuchsdaten findet lediglich eine qualitative Validierung statt. Ebenfalls werden Werkstoffmodelle für Beton- und Pflasterdecken vorgestellt.

Aufgrund wachsender Rechnerkapazitäten kommen häufig Mehrskalenmodelle zur Anwendung. Sie betrachten den Werkstoff auf verschiedenen Ebenen (Makro-Meso-Mikro). Mit dem Bottom-Up-Ansatz werden die Eigenschaften einer Ebene auf die nächsthöhere Ebene transformiert. AIGNER ET AL. [4] untersuchen Asphalt auf fünf Ebenen. Der Bitumen-, Mastix-, Mörtel-, Asphalt- und Makroebene. Die Makroebene repräsentiert das Kontinuum. Die thermoelastischen Eigenschaften des Komposits sind dem Bitumen zugeordnet und werden durch mit einer Homogenisierung auf den Asphalt übertragen. Die Körner sind als starre Einschlüsse angenommen, während das Bitumen mit dem Maxwell-Modell beschrieben ist. Die Validierung auf den verschiedenen Ebenen wird mit begleitenden Versuche sichergestellt, siehe hierzu [46]. PICHLER [76] überträgt das Vorgehen auf die generalisierte Selbstkonsistenzmethode (engl. generalized self-consistent scheme, GSCS) nach CHRISTENSEN/LO [20]. Neben der Methodik wird auch das Bitumenmodell hinterfragt und schließlich durch die Kriechfunktion des fraktionalen Maxwell-Modells ersetzt. Die endgültige Formulierung wird anhand von Versuchen nach HRISTOVA ET AL. [44] validiert. PICHLER [77] entwickelt den Ansatz aus [76] weiter und verwirft das Konzept effektiver Einschlussvolumina. Das GSCS wird daraufhin auf reelle Mischungsverhältnisse angewendet. Die Modellparameter sind an Bitumen verschiedener Herkunft und Güte bestimmt. Die Bottom-Up-Homogenisierung zeigt über die gewählten Skalen gute Übereinstimmung mit den durchgeführten Versuchen. Unabhängig davon bestätigt ALAM [5] das beschriebene Vorgehen bei einer ganz ähnlichen Modellbildung mit dem GSCS.

Die Ausführungen zeigen die große Bandbreite sowohl an zu untersuchenden Phänomenen, als auch an vorhandenen Lösungsansätzen. Sie verdeutlichen, dass ein umfassendes Modell, welches möglichst viele Phänomene beschreibt, sehr komplex sein muss. Für die weiteren, eigenen Ausführungen dient die Arbeit von BRODERSEN als Ausgangspunkt. Statt der dort verwendeten Mischungstheorie wird eine andere Formulierung entwickelt, welche die mikromechanischen Mechanismen erfasst und die für die numerische Anwendung der Berechnung von Asphaltmischungen geeignet ist.

Autor [Quelle]	Werkstoffmodell	σ - ε -Verhalten	Beschreibung	Jahr
Aflaki [2]	Burgers	linear	Einfluss von mod. Bitumen	2012
Darabi [23]	Perzyna + Schapery	nichtlinear	Spurrinnen	2013
Gajári [35]	v. Wolffersdorff + Dämpfer	nichtlinear	Spurrinnen	2012
Gartung [37]	Burgers	nichtlinear	Schädigung	1996
Krishnan [51]	Helmholtz- potential	nichtlinear	Verformung	2005
Mollenhauer [66]	Burgers	linear	Tieftemperaturver. & Schädigung	2008
Underwood [100]	${f Prony-Reihe} + work-potential$	linear	Schädigung	2011
Xu [107]	Huet-Sayegh	linear	Verformung	2009
Yu [108]	Lade-Nelsen + Perzyna	nichtlinear	Schädigung	2014

Tabelle 2.1: Übersicht Werkstoffmodelle (a) Makroskopische Werkstoffmodelle

(b) Mikroskopische Werkstoffmodelle

Autor [Quelle]	Werkstoffmodell	σ - ε -Verhalten	Beschreibung	Jahr
AIGNER [4]	Maxwell & Starrkörper	linear	Verformung & Methodik	2009
Alam [5]	empirisch	linear	Verformung	2015
Aschenbrenner [6]	frak. Burgers & v. Wolffersdorff	nichtlinear	Schädigung	2006
Brodersen [13]	frak. Maxwell & v. Wolffersdorff	nichtlinear	Verformung	2012
Oeser [72]	linel. & Darcy & frak. Zener	nichtlinear	Verformung	2010
Pichler [76]	frak. Maxwell & Starrkörper	linear	Verformung & Methodik	2009
Pichler [77]	frak. Maxwell & Starrkörper	linear	Verformung & Methodik	2012
Polacco [81]	allg. Erläuterung	linear & nichtlinear	Verformung	2006
Shen [93]	DEM	linear	Einfluss der Korngröße	2011
Shenoy [94]	DEM	k.A.	Einfluss der Sieblinie	2000
Singh [95]	Power-Law & Starrkörper	nichtlinear	Einfluss der Sieblinie	2012
Tehrani [99]	gen. Maxwell & linel.	linear	Einfluss 2D- & 3D-Modellierung	2013
Yu [109]	DEM	linear	Einfluss der Kornform	2012

3 Mineralstoff

Haupt bestandteil von Asphalt sind die Mineralstoffe. Sie dienen der Aussteifung der Bitumenmatrix und dem Lastabtrag über das Korngerüst. Zu unterscheiden ist zwischen der Anordnung des Einzelkorns in Gussasphalten und Asphalt betonen. Während in Gussasphalt die Einzelkörner in einer ausgeprägten Bitumenschicht eingebettet sind, ist die Packung in Asphalt betonen sehr viel dichter, so dass über eine Verkettung von Kontaktstellen ein tragendes Korngerüst entsteht. Der Bitumenfilm an den Kontakten ist sehr dünn. Kleinst kornanteile, auch Füller genannt, werden verwendet um die Packung zu optimieren und immer kleinere Hohlräume zwischen den Körnern auszufüllen. Art und Qualität der mineralischen Zuschläge sowie der fachgerechte Umgang während des Einbaus beeinflussen maßgeblich die Lebensdauer des Straßenquerschnitts.

3.1 Korneigenschaften

Im Straßenbau wird zwischen verschiedenen Kornarten unterschieden. Anhand ihrer Herkunft lassen sich die Kornarten in Gruppen zusammenfassen. In Steinbrüchen entstehen durch Sprengabbau gebrochene Naturgesteine [102]. Aus Kiesgruben wird Naturstein mit gerundeten Oberflächen gewonnen, wenn das Gestein durch den Ablagerungsprozess poliert ist. Außerdem kann das Korn aus Industrieabfällen wie Hochofen- und Metallhüttenschlacke gewonnen werden. Auch künstliche Erzeugnisse wie Aufhellungsstoffe werden dazugesetzt.

Jedes Gestein trägt durch unterschiedliche Widerstände sowie seiner individuellen Form, gedrungen, platt oder stängelig, entscheidend zur Festigkeit des Asphalts bei. So wird je nach Anwendungsbereich und zu erwartender Belastung die optimale Mischung gesucht. Die Anforderungen an das Korn sind in der TL GESTEIN-STB [33] geregelt.

Witterungswiderstand

Ein wesentlicher Faktor für die Lebensdauer einer Asphaltschicht ist der Widerstand gegen äußere Einflüsse. Neben der Verkehrslast sind dies vor allem die Witterungseinflüsse, denen der Straßenquerschnitt dauerhaft ausgesetzt ist. Es ist zu verhindern, dass Wasser in das Korn eindringt. Tritt Wasser ein, muss das Korn einen Restporenraum besitzen in dem sich das Wasser während der Eisbildung ausdehnen kann ohne das Korn zu schädigen. Abbildung 3.1a verdeutlicht den Prozess der Frostsprengung, der das Korn teilweise oder komplett zerstören kann [102]. Ein geschädigtes Korn vermindert die Standfestigkeit, da hier eine oder mehrere neue Scherflächen auftreten können.

Festigkeit

Während der Einbau- und der Nutzungsphase unterliegen die Körner starken Druckbeanspruchungen, die meist schlagartig über Kanten und Spitzen auf die angrenzenden Körner übertragen werden [102]. Eine hohe Kornfestigkeit ist notwendig, um das Abbrechen der Kontaktstellen zu verhindern, dargestellt in Abbildung 3.1b.



Abbildung 3.1: Entstehung von Scherflächen durch Schädigung

3.2 Korngerüst

Maßgebend für den Verformungswiderstand des Straßenquerschnitts ist ein hinreichend dichtes Korngerüst mit vielen Korn-zu-Korn-Kontakten. Der Lastabtrag erfolgt hierbei über das Korngerüst, das wesentlich steifer ist als die Bitumenmatrix. Gleichzeitig ist ein gut ausgebildetes Korngerüst entscheidend für den Widerstand gegen Spurrinnenbildung, da plastische Verformungen begrenzt werden. Eine falsche Kornabstufung kann die Tragfähigkeit negativ beeinflussen. Dabei sind die Beschreibung der Mischung mit der Sieblinie und die Ausprägung des Korngerüsts eng miteinander verknüpft. Die zugelassenen Kornanteile sind in den TECHNISCHEN LIEFERBEDINGUNGEN FÜR ASPHALTMISCHGUT FÜR DEN BAU VON VERKEHRSFLÄCHENBEFESTIGUNGEN [31] für Asphaltbetone, Splittmastixasphalt und Gussasphalt für, sofern als Bauweise zugelassen, Trag-, Binder- und Deckschichten angegeben.

3.2.1 Grundlagen granularer Packungen

Wird ein Raum mit Partikeln, zum Beispiel dem Mineralstoff, gleicher Größe aufgefüllt bleibt ein Restvolumen Luft in den Zwischenräumen [73]. Optimal ist, die Porenräume mit kleineren Partikeln zu füllen, ohne dabei die Kontakte der größeren Partikel zu beeinflussen. Die Packungsdichte ist mit der Porenzahl *e* definiert. In granularen Mischungen wird diese durch zwei Mechanismen maßgeblich beeinflusst. Zum einen ist dies der Wandeffekt und zum anderen das Auflockern der vorhandenen Struktur durch weitere Partikel.

Der Wandeffekt beschreibt den Einfluss eines wandartigen Hindernisses, an welches die Partikelstruktur angrenzt, auf die Porenzahl. Da sich die Struktur an einer solchen Wand nicht ungestört einstellen kann, bzw. die Hohlräume nicht durch weitere Partikel aufgefüllt werden können, erhöht sich die Porenzahl *e*, siehe Abbildung 3.2a. Ebenso können solche Störstellen durch Partikel mit größerem Durchmesser hervorgerufen werden. So steigt bei einer Mischung aus Partikeln zweier verschiedener Radien die Porenzahl an.



Abbildung 3.2: Einflüsse auf das Porenvolumen e nach [73]

Beim Auflockerungseffekt hingegen stören die kleinen Partikel die größeren. Wird ein Volumen mit unterschiedlichen Partikeln gefüllt und wird dieses gemischt, tritt eine zufällige Verteilung der Partikel im Raum ein. Ein Teil der kleinen Partikel füllt Hohlräume zwischen den größeren Partikeln. Ist der Anteil kleiner Partikel groß genug, beginnen sie die Struktur aus größeren Partikeln zu stören. Wie Abbildung 3.2b zeigt, lockert dies das Korngerüst und die Porenzahl e nimmt zu.

Ziel der Asphaltherstellung ist es, ein tragfähiges Korngerüst mit möglichst geringen Hohlräumen herzustellen. Eine optimierte Korngrößenverteilung ist daher notwendig.

3.2.2 Sieblinie

Das Konzept einer abgestuften Kornverteilung wird vom Betonbau auf den Straßenbau übertragen. Bereits 1907 untersuchen FULLER/THOMPSON [34] die Auswirkungen verschiedener Gesteinsgrößen auf das Mischungsverhältnis für einen dichten Beton, mit dem Ziel einen qualitativ hochwertigen aber günstigen Beton herzustellen. Dazu soll der Zementanteil möglichst gering sein. Das Ergebnis ist die heute bekannte Fullerparabel, siehe Gleichung (3.1). Sie beschreibt den Zusammenhang zwischen Korngröße und Massenanteil einer Mischung. Eine Idealsieblinie für gebrochene Körner wird mit m = 0.45 erreicht. Auf Grundlage gleichmäßig abgestufter Sieblinien entstehen Asphaltbetone.

Die Fuller-Parabel

$$P = 100 \left(\frac{d}{D}\right)^m \tag{3.1}$$

wird mit dem Massenanteil P, der durch ein Sieb der Größe d fällt, dem Größtkorn der Sieblinie sowie dem Exponenten m beschrieben. Neben Korngrößenverteilungen mit gleichmäßig abgestufter Sieblinie werden auch Sieblinien mit Ausfallkörnung, zum Beispiel bei der Herstellung von Splittmastixasphalt (SMA), verwendet. Das Ziel des SMA ist ein dichtes Korngerüst mit groben, tragfähigen Körnern und vielen Korn-zu-Korn Kontakten herzustellen. Die Hohlräume werden mit feineren Kornfraktionen aufgefüllt. So ist ein Minimum an Porenraum erreichbar und entsprechend weniger Bitumen für die Herstellung notwendig.

BAILEY [7] entwickelt eine Methode, die eine Beurteilung der Korngrößenverteilung ermöglicht. Er identifiziert die grobe Körnung als Struktur bildend, während kleine Korngrößen die entstehenden Hohlräume ausfüllen. Daraus entwickelte Bezugsgrößen sind festgelegte Siebdurchmesser. In LIRA ET AL. [58] wird die Methodik weiterentwickelt und auf beliebige Siebdurchmesser angewendet. OLARD/PERRATON [73] zeigen, dass die Auflockerung des Korngerüsts nicht ausgeschlossen wird, da die Abgrenzung der Durchmesser zu groß gewählt ist. Des weiteren stellen sie eine Methode vor, die den Einfluss der Kornfraktionen auf die Porenzahl genauer beschreibt und Auflockerungseffekte durch die Kornverteilung erfasst. Im Rahmen des *Strategic Highway Research Program* sind kleine Bereiche in den Sandanteilen der Sieblinie mit negativem Einfluss auf die Standfestigkeit identifiziert worden. Werden diese Korngrößen bei der Herstellung ausgelassen, bezeichnet man das Produkt als *Gap-Graded*-Asphalt. Die Sieblinie gibt Grenzen an, in denen die Kornanteile gewählt werden dürfen. Das der Mittelwert nicht immer die geeignetste Wahl ist, zeigt SANGSEFIDI [87].

Die Norm fordert neben der Sieblinie unter anderem auch Angaben über das zulässige Restporenvolumen, um eine Asphaltmischung eindeutig zu beschreiben. Für die in der vorliegenden Arbeit untersuchten Asphalte AC 11 und SMA 11 sind in Abbildung 3.3 und Abbildung 3.4 beispielhaft die zulässigen Bandbreiten für die Sieblinien und die Porenvolumina gezeigt. Zum Vergleich ist neben den für die Herstellung der Probekörper verwendeten Kurven die Fuller-Parabel mit m = 0,45 abgebildet.

Es wird deutlich, dass der zulässige Bereich des AC 11 um die Fullerparabel ausgelegt ist. Währenddessen dominiert in der Sieblinie des SMA 11 die Ausfallkörnung zwischen dem 8 mm und 11,2 mm Sieb. Der gemessene Hohlraumgehalt

beträgt für den AC 11 4,4 V-%. Der AC 11 ist demnach für eine Binderschicht ausgelegt. Der Hohlraumgehalt des SMA 11 unterschreitet den geforderten Mindestwert um 0,1 V-%. Trotz dieser kleinen Abweichung wird damit eine Deckschichtmischung SMA 11 S beschrieben.



Abbildung 3.3: Binderschicht aus Asphaltbeton AC11 BN



Abbildung 3.4: Deckschicht aus Splittmastixasphalt SMA11 S

3.3 Werkstoffmodell Korn

ASCHENBRENNER [6], BRODERSEN [13] und GAJÁRI [35, 36] formulieren das Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Korngerüsts mit dem Werkstoffmodell nach von WOLFFERSDORFF [103]. Das Modell beschreibt das Verhalten des losen, ungebundenen Haufwerks mit einem hypoplastischen Ansatz. Für das ungebundene Korn ist die Modellqualität sehr gut. Für die Anwendung in einem Homogenisierungsverfahren wird hingegen nicht die Steifigkeit des Korngerüsts, sondern die des Einzelkorns benötigt. Der Mineralstoff wird deshalb in dieser Arbeit über das Einzelkorn beschrieben, welches in eine Hülle aus Bitumen eingeschlossen ist. Das Werkstoffverhalten des Einzelkorns wird mit der Elastizitätsmatrix

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$
(3.2)

 $dreidimensional,\ linear-elastisch$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} \,\boldsymbol{\sigma} \tag{3.3}$$

beschrieben. Für die weitere Betrachtung ist es notwendig, den Zusammenhang additiv in einen Gestalt- und einen Formänderungsanteil aufzuteilen. Mit dem Elastizitätsmodul E und der Querdehnzahl ν bestimmt sich der Kompressionsmodul K und der Schubmodul μ zu

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} , \qquad (3.4)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \,. \tag{3.5}$$

Gleichung (3.3) kann unter Berücksichtigung der volumetrischen Operatormatrix

und der deviatorischen Operatormatrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
(3.7)

in die Form

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\frac{1}{3K}\mathbf{K} + \frac{1}{2\mu}\mathbf{D}\right]\boldsymbol{\sigma}$$
(3.8)

überführt werden. Der erste Summand beschreibt die hydrostatischen, der zweite die deviatorischen Verzerrungen.

Für die in dieser Arbeit untersuchten Asphaltversuche wird gebrochener Gabbro verwendet. Die Materialeigenschaften sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst [96, 106].

Dichte	E-Modul	$\operatorname{Druckfestigkeit}$	${ m Zugfest}$ igkeit	Querdehnzahl
$[g/cm^3]$	$[N/mm^2]$	$[N/mm^2]$	$[N/mm^2]$	[—]
2,65	$7\cdot10^4$ - $1,1\cdot10^5$	124 - 303	15-30	0,2

Tabelle 3.1: Materialkennwerte Gabbro

4 Bitumen

Als Bindemittel wird im Straßenbau beinahe ausschließlich Bitumen verwendet. Bitumen hat sich seit seiner Einführung von einem Abfallprodukt der Erdölraffination zu einem hochspezialisierten Werkstoff in vielen verschiedenen Varianten entwickelt. Neben reinen Bitumen werden im modernen Straßenbau auch polymermodifizierte Bitumen verwendet. Hierbei werden durch gezieltes hinzufügen bestimmter Polymerketten einzelne Eigenschaften, zum Beispiel der Einfluss der Temperatur auf die Steifigkeit, verändert. Um in dieser Art in das Bitumengefüge einzugreifen und die Ursache des thermomechanischen Spannungs-Dehnungs-Verhaltens zu verstehen, ist ein sehr gutes Verständnis der internen Struktur und der dort vorhandenen Prozesse Voraussetzung.

4.1 Chemische Zusammensetzung

Bitumen ist ein organisches, schwarzes, schwerflüssiges, nicht flüchtiges, adhäsives und wasserundurchlässiges Material. Es besitzt eine Dichte zwischen $1,01 - 1,04 \ g/cm^3$. Je nach Herkunft liegt der Glaspunkt zwischen +5 °C und -40 °C [57]. Der Glaspunkt beschreibt den Temperaturbereich, in dem sich das Werkstoffverhalten von der eines Festkörpers zu der eines Fluids verändert. Unterhalb des Glaspunkts ist die Materialantwort nahezu linear-elastisch. Oberhalb verändert sich das Verhalten mit zunehmender Temperatur von einer nicht Newton'schen Flüssigkeit zu einer Newton'schen Flüssigkeit. Abbildung 4.1 zeigt schematisch, dass die Steifigkeit im Übergangsbereich stark abfällt.





Die Hauptbestandteile sind Kohlenstoff (82-84%) und Wasserstoff (8-11%) [83]. Hinzu kommen geringere Anteile an Schwefel (0-6%), Sauerstoff (0-1,5%), Stickstoff (0-1%) und Spuren von Metallen. Durch die vielfältige Anordnungsmöglichkeit der Heteroatome in den Molekülen entstehen beliebig viele unterschiedliche Moleküle. Eine vollständige chemische Analyse ist somit nahezu unmöglich, da bereits in einer einzelnen Probe eine Vielfalt an Molekülen vorhanden ist [68]. Somit ist es kaum möglich, die rheologischen Eigenschaften des Bitumens einzelnen Molekülen zu zuordnen [86]. Es sind jedoch Molekülgruppen identifiziert, die für einzelne Phänomene wesentlich verantwortlich sind, und als SARA-Fraktionen bezeichnet werden, benannt nach den Bestandteilen aus gesättigten Kohlenwasserstoffölen (*saturates*), Asphaltenen (*asphaltenes*), Erdölharze (*resins*) und aromatischen Ölen (*aromatics*). Die Phaseneinteilung erfolgt gemäß Abbildung 4.2. Maßgebend für die rheologischen Eigenschaften von Bitumen sind somit die Anteile der SARA-Fraktionen [57].



Abbildung 4.2: SARA-Einteilung für Bitumen

Asphaltene

Asphaltene treten bei Raumtemperatur als schwarzes Pulver auf. Sie sind schwer löslich und entscheidend für die Viskosität des Bitumens [57]. Ihr Anteil am Bitumen beträgt zwischen 5 - 20 M. -%. Ihr Gewicht beträgt, abhängig von der Messmethode, zwischen 800 - 3.500 g/mol. Sie bestehen aus 4-10 aromatischen Ringstrukturen und gesättigten Kohlenwasserstoffen, siehe Abbildung 4.3a. In der Molekülstruktur sind häufig Heteroatome (R) enthalten. Asphaltene sind stark polarisiert und entwickeln durch Dipole starke Bindungskräfte untereinander.



Abbildung 4.3: Struktur der SARA-Fraktionen

Harze

Bei Raumtemperatur treten Harze als schwarzer Feststoff auf [57]. Ihr Anteil beträgt zwischen 30-45M. -%. Ihr Gewicht 1. 100g/mol. Sie bilden eine weniger komplexe Aromatenstruktur als Asphaltene. Die Anzahl an aromatischen Ringen beträgt zwischen zwei und vier. Dabei können sie stärker polarisiert sein als die Asphaltene. Die Struktur des Bitumens wird durch die Menge an Harzen maßgebend beeinflusst, da sich dieses als stabilisierende, solvatisierende Hülle um die Asphaltene anordnet [83]. Die Stärke der Polarisation des Asphalten-Harz-Körpers nimmt damit vom Zentrum zu den Rändern hin ab [68].

Gesättigte Kohlenwasserstoffe

Gesättigte Kohlenwasserstoffe bilden bei Raumtemperatur eine farblose Flüssigkeit. Sie haben einen Anteil von 5-15M. -% am Bitumen [57]. Das Gewicht eines Moleküls beträgt 600g/mol und der Glaspunkt liegt bei -70 °C. Wie Abbildung 4.3b zeigt, bestehen sie aus langen aliphatischen Ketten, die eine verästelte Struktur ausbilden. Es sind sehr wenige polare Atome und aromatische Ringe vorhanden. Ihre Ladung ist neutral. Dennoch beeinflussen die gesättigten Kohlenwasserstoffe die Fähigkeit der Maltenephase, die Asphaltene zu solvatisieren.

Aromate

Bei Raumtemperatur sind Aromate als gelbe bis rote Flüssigkeit vorhanden [57]. Mit 30-45 M. -% ist ihr Anteil am Bitumen in etwa so groß wie der Erdölharze. Die Viskosität ist höher als bei den gesättigten Kohlenwasserstoffen, der Glaspunkt liegt bei ca. -20 °C. Das Kohlenstoffgerüst ist leicht aliphatisch mit verdichteten aromatischen Ringen, siehe Abbildung 4.3c. Die molare Masse beträgt 800 g/mol. Die Aromate sind ladungsneutral und bilden einen großen Teil der Dispersionsflüssigkeit.

Einfluss der SARA-Fraktionen

Über das Mischungsverhältnis der SARA-Fraktionen kann man unterschiedliche Bitumen einordnen und entsprechende rheologische Eigenschaften beschreiben [60]. Für die Einordnung werden die Verhältnisse

$$HA = \frac{Harz}{Asphalten}, \qquad (4.1)$$

$$AA = \frac{Aromat}{Asphalten}$$
(4.2)

sowie der Kolloidindex

$$KI = \frac{Aromat + Harz}{ges. Kohlenwasserst. + Asphalten}$$
(4.3)

verwendet. Während sich in einer Bitumengruppe das Verhältnis HA nicht ändert, wird mit zunehmenden Penetrationsindex der Faktor AA größer, wenn der Anteil der Maltenephase zunimmt. Mit steigendem Kolloidindex KI werden mehr Asphaltene in den Erdölharzen solvatisiert, sodas das Bitumen weicher wird.

Durch die Veränderung der Anteile in den SARA-Fraktionen ändert sich auch die Bitumenstruktur, welche die rheologischen Eigenschaften bestimmt.

4.2 Bitumenstruktur

Die Veränderungen der Bitumenstruktur sind maßgebend für die Entwicklung des Materialverhaltens. Die klassische Kolloidtheorie wird dabei vor allem durch Erkenntnisse des *Strategic Highway Research Program (SHRP)* aus den USA teilweise ersetzt und erweitert. Das Programm wurde zwischen 1987 und 1992 umgesetzt und umfasst Forschungsschwerpunkte zu Asphalt, Beton und Bauwerken, Verfahrenstechnik und Arbeitssicherheit sowie langfristige Untersuchungen zur Dauerhaftigkeit von Strassenbelägen.



Abbildung 4.4: Bitumenstruktur

Bitumen als Kolloid

Ein Kolloid bezeichnet eine Mischung in der feste oder flüssige Phasen in einem Dispersionsmedium fein verteilt sind. Kolloide sind zwischen Lösungen und Suspensionen einzuordnen. Die Kolloidstruktur wird erstmals 1920 von F.J. NELLENSTEYN mit Hilfe des Tyndalleffekts nachgewiesen [10]. Dabei bilden die Asphaltene Mizellen, einen Zusammenschluss aus mehreren Asphaltenmolekülen, welche gelöst in der Maltenephase vorliegen [83]. Je nach Solvatisierungsgrad spricht man von einem Sol-, Sol-Gel- oder Gel-Bitumen, dargestellt in Abbildung 4.4.

Ein Sol-Bitumen zeichnet sich durch die vollständige Lösung der Asphaltenmizellen durch die Erdölharze aus. Die Asphaltenlösung ist dünn in der Maltenephase, dem Dispersionsmedium, verteilt [68]. Die Maltenephase besitzt einen hohen Gehalt an aromatischen Kohlenwasserstoffen. Das Materialverhalten ist viskos.

Zwischen den extremen Ausprägungen besitzt ein großer Teil der verschiedenen Bitumenarten eine Sol-Gel-Struktur. Dabei sind die Asphaltenmizellen weder vollständig gelöst, noch bilden sie ein volumenfüllendes Netzwerk. Es bilden sich jedoch einzelne Ansammlungen aus Mizellen. Dadurch ist das Materialverhalten viskoelastisch.

Gel-Bitumen wird von Asphaltenstrukturen dominiert. Bedingt durch ihre Ladung ordnen sich die Asphaltenmizellen zu einem kontinuierlichen Netzwerk an. Ein hoher Asphaltengehalt ist hierfür ebenso Voraussetzung wie ein niedriger Gehalt an aromatischen Kohlenwasserstoffen in der Maltenephase. Das Materialverhalten ist elastisch.

Moderne Kolloidtheorien beschreiben den Unterschied zwischen Sol und Gel über die Anzahl an solvatisierten Asphaltenen. Dabei zeigt das Bitumen Eigenschaften einer nicht Newton'schen Flüssigkeit [57, 83]. Das Materialverhalten ist die Folge von inter- und intramolekularen Bindungen zwischen den Asphaltenen und den weiteren Bestandteilen. Unter Schubbeanspruchung trennen sich diese Verbindungen, die von klassischen Newton'schen Konzepten nicht erfasst werden. Im Gebrauchstemperaturbereich von Asphalt ist das mechanische Verhalten viskoelastisch. Alterungsprozesse (Oxidation, Verflüchtigung leichter Bestandteile, Polymerisation) verursachen eine Verhärtung und erhöhen die Rissanfälligkeit [57].

Erkenntnisse aus dem Strategic Highway Research Program

Im Rahmen des SHRP, einem umfangreichem Forschungsprogramm zur Verbesserung von Straßenbauwerkstoffen in den USA, werden unter anderem der Aufbau und die Eigenschaften von Bitumen untersucht.

Die polarisierten Moleküle bilden Dipole und ziehen sich gegenseitig an [86]. Bisher wird die Polarisierung als Mizellbildung gedeutet. Nun wird angenommen, dass durch die Polarisierung eine geordnete Struktur entsteht, die räumlich, intermolekular ist und einen thermodynamisch niedrigeren Energiezustand innehat. Die Struktur besteht aus bis zu 40 Molekülen und wird von Kovalenzbindungen sowie den Van-der-Waals-Kräften und Wasserstoffbrückenbindungen zusammengehalten. Im Vergleich zu Kovalenzbindungen sind diese Kräfte sehr schwach und haben eine kurze Reichweite. Spannungen aus äußeren Einwirkungen oder Temperatur belasten diese Verbindungen und können zu ihrer Zerstörung führen. Daraus resultiert eine Veränderung der rheologischen Eigenschaften bei gleichbleibender Molekülzusammensetzung.

Während der Alterungsprozesse entstehen durch Oxidation lokale Punkte mit höherer Polarität. Damit verbunden ist eine Restrukturierung der Molekülanordnung und damit wiederum eine Veränderung der Materialeigenschaften.

In der SHRP-Anschauung wird die große Temperaturabhängigkeit des Deformationsverhaltens mit dem Lösen von intermolekularen Bindungen bei hohen Temperaturen beschrieben. Das Bitumen wird dadurch niedrigviskoser. Unter 0 °C organisieren sich hingegen auch die nichtpolaren Bestandteile der Maltenephase und die Viskosität des Bitumens nimmt zu.

4.3 Werkstoffmodell Bitumen

Das Materialverhalten von Bitumen wird durch zeitabhängige Verformungen bestimmt. Die Kohlenwasserstoffketten des Bitumens verhalten sich dabei ähnlich wie Polymerketten und Polymerknäule in Polymermischungen. Die Asphaltene, verteilt in der Maltenephase, verteilen die Last in der Mikrostruktur [43]. Die Neuordnung der Asphaltenmoleküle findet nicht spontan statt, sondern zeitabhängig. Die dabei auftretenden viskosen Verformungen sind mit Verfestigungsprozessen verbunden. Diese können als interne Strukturbildung gedeutet werden. Das sich so mit der Zeit verändernde Materialverhalten kann mit rheologischen Körpern beschrieben werden.
Erfolgt die Modellierung mit den klassischen Modellkörpern, erfordert dies in der Regel ein mehrfach verzweigtes rheologisches Modell aus Feder- und Dämpfer-Elementen. Ein weit verbreitetes Modell ist das generalisierte Maxwell-Modell, siehe zum Beispiel [99, 91, 97]. Abbildung 4.5 veranschaulicht die schnell wachsende Zahl an zu bestimmenden Parametern. Dies folgt daraus, dass die Kriech- und Relaxationsprozesse üblicherweise nicht nur zu einem einzigen Zeitpunkt ablaufen sondern bei jeder Zustandsänderung erneut beginnen. Im generalisierten Maxwell-Modell ist dann für jede diskrete Retardationszeit τ_j ein Feder-Dämpfer-System mit den zu bestimmenden Parametern η_j und E_j hinzuzufügen.



Abbildung 4.5: Generalisiertes Maxwell-Modell

Fraktionale Werkstoffmodelle beschreiben das Werkstoffverhalten über die selbstähnliche interne Strukturen wie sie zum Beispiel von Polymeren bekannt ist. Dabei gehen die diskreten Retardationszeiten in eine kontinuierliche Formulierung über. GORENFLO/MAINARDI [14] zeigen, dass das mit einem geringen Parameteraufwand möglich ist und dabei dennoch große Zeit- und Frequenzbereiche abgebildet werden können.

ASCHENBRENNER [6] und BRODERSEN [13] übertragen kontinuumsmechanische, fraktionale Werkstoffmodelle auf das im Asphalt verwendete Bitumen. Im Folgenden werden die für diese Arbeit notwendigen Einführungen und Zusammenhänge in fraktionale Werkstoffmodelle gegeben.

4.3.1 Die fraktionale Integral- und Differantialrechnung

Zu den grundlegenden Rechenoperationen der Mathematik zählt die Integralund Differentialrechnung. Die für die Differentialrechnung verwendete Notation $\frac{d^n f}{dt^n}$ der *n*-fachen Ableitung einer Funktion f(t) setzt dabei in der Regel voraus, dass für *n* nur natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ verwendet werden. Die Integration ist die inverse Rechenoperation der Differentiation und wird demnach mit $\frac{d^{-n}}{dt^{-n}}$ beschrieben. Gilt $n \in \mathbb{Z}$ lässt sich die Integration und Differentiation mit

$$\frac{d^{n}f}{\left[d(t-a)\right]^{n}} \equiv \lim_{N \to \infty} \left\{ \frac{\left[\frac{t-a}{N}\right]^{-n}}{\Gamma(-n)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(j+1)} f\left(t-j\left[\frac{t-a}{N}\right]\right) \right\}$$
(4.4)

verallgemeinern. a beschreibt dabei die formelle symbolische Erweiterung auf Integrationsgrenzen a < 0 [74].

Bereits 1695 diskutieren LEIBNIZ und L'HOSPITAL die Möglichkeit, dass n nicht nur Teil der Zahlenmenge \mathbb{Z} , sondern auch der reellen Zahlen \mathbb{R} ist. Die nicht ganzzahlige Ordnung n wird von späteren Mathematikern als fraktionale Ableitung bzw. fraktionale Integration bezeichnet. Fraktionale Differentialgleichungen zur Beschreibung mechanischer Prozesse werden mit fraktionalen Operatoren nach RIEMANN-LIOUVILLE, CAPUTO und GRÜNWALD-LETNIKOV beschrieben. Für eine ausführliche Beschreibung und Herleitung wird auf OLDHAM/SPAN-IER [74] und PODLUBNY [79] verwiesen. Im Folgenden wird die Bezeichnung nfür ganzzahlige und α für reellwertige Rechenoperationen verwendet.

Definition nach Riemann-Liouville

Die am häufigsten verwendete Definition fraktionaler Rechenoperationen geht auf RIEMANN und LIOUVILLE zurück. Ihre Definition lautet

$$D_{RL}^{\alpha} = \left[\frac{d^{\alpha}f}{[d(t-a)]^{\alpha}}\right]_{RL} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{a}^{t} [t-\tau]^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \, \alpha < 0.$$
(4.5)

Dabei ist die Anwendung zunächst auf $\alpha<0$ beschränkt. Die Erweiterung auf $\alpha\geq 0$ erfolgt durch die Forderung, dass

$$\left[\frac{d^{\alpha}f}{\left[d(t-a)\right]^{\alpha}}\right]_{RL} = \frac{d^{n}}{dt^{n}} \left[\frac{d^{\alpha-n}f}{\left[d(t-a)\right]^{\alpha-n}}\right]_{RL}$$
(4.6)

erfüllen muss. Dabei ist $\frac{d^n}{dt^n}$ die einfache n-fache Differentiation und n so gewählt das gilt $\alpha - n < 0$ [74]. Gleichung (4.5) zusammen mit Gleichung (4.6) definieren dann für alle α den Operator D_{RL}^{α} .

Der Vorteil nach Gleichung (4.5) ist die Einfachheit der Gleichung mit einem einzelnen zu lösenden Integral. Sobald jedoch die Erweiterung nach Gleichung (4.6) für $\alpha > 0$ verwendet wird, steigt der Aufwand, da die *n*-fachen Ableitungen des Integrals ausgewertet werden müssen. Ein weiterer Nachteil ist die Verwendung für physikalisch begründete Anwendungen. Dort sind Anfangsbedingungen für physikalische Prozesse zu wählen, welche ganzzahligen Ableitungen entsprechen. Für den Ansatz nach RIEMANN-LIOUVILLE sind jedoch auch Anfangsbedingungen für die fraktionalen Ableitungen festzulegen. Dies ist mathematisch formal gut lösbar, jedoch gibt es keine physikalische Bedeutung der Anfangsbedingungen. Diesen Schwachpunkt behebt die Formulierung nach CAPUTO.

Definition nach Caputo

In CAPUTOS Definition

$$D_C^{\alpha} = \left[\frac{d^{\alpha}f}{\left[d(t-a)\right]^{\alpha}}\right]_C = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} f(\tau) d\tau \tag{4.7}$$

erfolgt die ganzzahlige Differentiation vor der reellwertigen Integration. Die Unterschiede der Operatoren nach RIEMANN-LIOUVILLE und CAPUTO sind ausführlich in PODLUBNY [79] diskutiert. Ein wesentliches Merkmal im Vergleich zu RIEMANN-LIOUVILLE ist, dass für fraktionale Differentialgleichungen nach CAPUTO nur ganzzahligen Ableitungen als Anfangsbedingungen zu setzen sind. Das Problem der nichtphysikalischen Anfangsbedingungen entfällt. Außerdem sind für konstante Funktionen neben den ganzzahligen auch die fraktionalen Ableitungen gleich null. Die Umsetzung von Gleichung (4.7) erfordert jedoch einen höheren Aufwand als für Gleichung (4.5).

Definition nach Grünwald-Letnikov

Die Schreibweise nach GRÜNWALD-LETNIKOV ist hier von besonderer Bedeutung. Sie führt auf eine inkrementelle Reihenentwicklung, die auf einfache Art in numerische Methoden integriert werden kann und bei der nur physikalische Anfangsbedingungen zu setzen sind.

Für den verallgemeinerten Differentialquotienten von ganzzahligen Ableitungen der Ordnung α einer Funktion f(t) und der Schrittweite h folgt mit dem Binominalkoeffizienten

$$\frac{d^{\alpha}f}{dt^{\alpha}} = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{i=0}^{\alpha} (-1)^{i} \binom{\alpha}{j} f(t + (\alpha - i)h) \right\}.$$
(4.8)

Mit der Schrittweite $h = \frac{t}{N}$ folgt für positive reelle Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit

$$D^{\alpha}f(t) = \lim_{N \to \infty} \left(\left(\frac{t}{N}\right)^{-\alpha} \sum_{i=0}^{N} (-1)^{i} \binom{\alpha}{i} f\left(t\left(1-\frac{i}{N}\right)\right) \right)$$
(4.9)

die Definition fraktionaler Ableitungen nach GRÜNWALD-LETNIKOV. Diese wird

unter Annahme kleiner Zeitschritte $\Delta t = \frac{t}{N}$ in die diskrete Schreibweise

$$D^{\alpha}f_{N} = \frac{1}{\Delta t^{\alpha}} \sum_{i=0}^{N} (-1)^{\alpha} {\alpha \choose i} f_{N-i} = \frac{1}{\Delta t^{\alpha}} \sum_{i=0}^{N} w_{i}f_{N-i}$$
(4.10)

überführt. Die Wichtungsfaktoren w_i sind mit dem verallgemeinerten Binominalkoeffzienten, der Gammafunktion oder einer Produktreihe

$$w_i = (-1)^i \binom{\alpha}{i} = \frac{\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(i+1)} = \prod_{j=0}^i \frac{j-\alpha-1}{j}$$
(4.11)

beschrieben. Die Herleitung fraktionaler Integrale erfolgt entsprechend für Ableitungen negativer Ordnung $\alpha \in \mathbb{R}^{-}$.

4.3.2 Das fraktionale rheologische Element



Abbildung 4.6: Herleitung fraktionales Element

Wird der fraktionale Ansatz auf die Rheologie übertragen ist das zu Grunde liegende rheologische Modell eine sich unendlich verzweigende Baumstruktur aus parallelen Feder-Dämpfer-Systemen. Abbildung 4.6 zeigt dabei, wie sich das Modell durch das fraktionale Element vereinfacht. KOELLER [50] bezeichnet das neue fraktionale Element als *spring-pot*. Ein Übertrag auf mechanische Fragestellungen ist mit Hilfe der Operatorschreibweise nach KAI-XIN/KE-QIN [47] möglich.

$$\sigma = E^{(1-\alpha)} \eta^{\alpha} \frac{d^{\alpha} \varepsilon}{dt^{\alpha}} \tag{4.12}$$

beschreibt das Werkstoffverhalten mit der Steifigkeit E, der Viskosität η und der reellwertigen Ableitungsordnung α . Für die Ableitungsordnungen 0 und 1 geht die Lösung in die bekannte Formulierung von Feder und Dämpfer über,

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon \\ E^{(1-\alpha)}\eta^{\alpha} \frac{d^{\alpha}\varepsilon}{dt^{\alpha}} \\ \eta \dot{\varepsilon} \end{cases}, \ [0,1] = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid 0 \le \alpha \le 1\} .$$
 (4.13)

4.3.3 fading memory und nested mesh-Prinzip

In Gleichung (4.10) hängt die Lösung des aktuellen Inkrements N von den Lösungen der vorherigen Inkremente N-i ab. Der Wichtungsfaktor w_i beschreibt den Einfluss der Lösung f_{N-i} auf die aktuelle Lösung f_N . Tabelle 4.1 Abbildung 4.7 zeigen, dass der Einfluss der vorherigen Lösungen schnell abnimmt. Bereits ab i = 10 ist w_i von der Ordnung 10^{-3} . Der immer kleiner werdende Einfluss weit in der Vergangenheit liegender Ergebnisse wird als *fading memory* bezeichnet.

Unabhängig von der Ableitungsordnung ist $w_i = 1$ für i = 0. Diese Eigenschaft ermöglicht die Berechnung des aktuellen Inkrements N

$$D^{\alpha}f_{N} = f_{N} + \frac{1}{\Delta t^{\alpha}} \sum_{j=1}^{N} w_{j}f_{N-j} = f_{N} + D_{r}^{\alpha}$$
(4.14)

mit dem Summationsrest $D_{\mathbf{r}}^{\alpha}$. Ein Nachteil dieser Form ist die einheitliche Zeitschrittweite Δt^{α} .

i	$\alpha = 0,00$	$\alpha = 0,33$	$\alpha = 0,66$	$\alpha = 1,00$
1	0	$-3,3 \cdot 10^{-1}$	$-6,6\cdot 10^{-1}$	-1,0
2	0	$-1,1\cdot 10^{-1}$	$-1,1\cdot 10^{-1}$	0
3	0	$-6,1\cdot 10^{-2}$	$-5,0\cdot 10^{-2}$	0
10	0	$-1,2 \cdot 10^{-2}$	$-5,8 \cdot 10^{-3}$	0
20	0	$-4,6\cdot 10^{-3}$	$-1,8 \cdot 10^{-3}$	0
21	0	$-4,3 \cdot 10^{-3}$	$-1,6 \cdot 10^{-3}$	0
22	0	$-4,1\cdot 10^{-3}$	$-1,5 \cdot 10^{-3}$	0

Tabelle 4.1: Einfluss von w_i



Abbildung 4.7: Abklingverhalten der Grünwaldgewichte w_i

Aufgrund der als klein zu wählenden Zeitschritte Δt^{α} entsteht ein großer numerischer Aufwand. Es liegt nahe, nicht alle N Ergebnisse in die Lösung mit einzubeziehen, weil die in der weiten Vergangenheit liegenden Ergebnisse einen sehr geringen Einfluss auf die Lösung haben. FORD/SIMPSON [28] und SCHMIDT/GAUL [92] vergleichen verschiedene Ansätze. Sie zeigen, dass ein fixed mesh mit fester Schrittweite, zum Beispiel $\frac{1}{4}N$, einen mit der Berechnungsdauer ansteigenden Fehler erzeugt. Stattdessen wird ein nested mesh vorgeschlagen. Bei diesem Ansatz werden die vorhandenen Lösungen in Intervalle eingeteilt, deren Größe zunimmt, je weiter die Ergebnisse in der Vergangenheit liegen. So werden n_t Ergebnisse mit der Schrittweite $v_k = 2^k$ zwischen den auszuwertenden Punkten berücksichtigt. Im ersten Intervall ist k = 0. Anschließend wird die Schrittweite k um 1 erhöht und das nächste Intervall mit N_t Ergebnissen ausgewertet. Der Prozess wiederholt sich so oft bis das letzte Intervall ausgewertet ist. k wird je-



Abbildung 4.8: Fehlerentwicklung der nested mesh-Methode

doch nur erhöht, wenn das letzte Intervall mit N_t Punkten vollständig in die neue Intervallgröße passt. Ansonsten wird das letzte Intervall mit der nächstkleineren Ordnung ausgewertet. So sind die jüngst zurückliegenden Lösungen stärker gewichtet als die die weit in der Vergangenheit liegen. Das der Berechnungsaufwand dabei deutlich reduziert werden kann, zeigen sowohl FORD/SIMPSON [28], ASCHENBRENNER [6], BRODERSEN [13] und SCHMIDT/GAUL [92]. Die Wahl von N_t hängt dabei vor allem von der Anzahl der Berechnungsschritte ab. Abbildung 4.8 zeigt die Entwicklung des Fehlers mit fortschreitender Berechnungsdauer für einen Kriechversuch. Abhängig von N_t ist zu erkennen, wie der Fehler ab einer unzureichenden Anzahl von Stützstellen anwächst und nicht mehr vernachlässigt werden darf.

4.3.4 Das fraktionale Maxwell-Modell

Die klassischen rheologischen Körper, wie zum Beispiel das Kelvin-Voigt-, Maxwell- und Burgers-Modell, können mit dem fraktionalen Element neu formuliert werden. Hierfür werden die Dämpferelemente durch die fraktionalen Elemente ersetzt. Die Eigenschaften des Maxwell-Modells sind hier kurz vorgestellt, da dieses für die Beschreibung des Bitumens verwendet wird. Eine Übersicht über weitere fraktionale Modelle sind zum Beispiel in [6, 13, 17, 72] angegeben.

Das fraktionale Maxwell-Modell besteht aus einer Feder und einem fraktionalen Element, welche in Reihe geschaltet sind. Abbildung 4.9a zeigt, wie je nach Ableitungsordnung des fraktionalen Elements, elastisches, elasto-viskoelastischviskoplastisches oder elasto-viskoplastisches Spannungs-Dehungsverhalten abge-



Abbildung 4.9: σ -/ ε -Diagramm in Abhängigkeit von α

bildet wird. Für $\alpha = 1$ zeigt Abbildung 4.9b wie die Spannungen sich aufsättigen und schließlich konstant bleiben. Das entspricht formal dem klassischen Maxwellmodell mit einem Newton-Dämpfer. Für $0 < \alpha < 1$ gilt, dass eine Sättigungspannung erst bei $t = \infty$ erreicht wird. Bis zu diesem Zeitpunkt nimmt die Steifigkeit stetig ab.

Die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$\sigma + \frac{E_{\rm vp}}{E_{\rm el}} \left(\frac{\eta}{E_{\rm vp}}\right)^{\alpha} D^{\alpha} \sigma = E_{\rm vp} \left(\frac{\eta}{E_{\rm vp}}\right)^{\alpha} D^{\alpha} \varepsilon \,. \tag{4.15}$$

Diese Form ist für die Anwendung in numerischen Simulationen ungeeignet. Die Umformung in ein Differentialgleichungssystem mit internen Variablen gibt

$$\sigma = E_{\rm el} \left(\varepsilon - \varepsilon_{\rm vp} \right) \,, \tag{4.16}$$

$$D^{\alpha}\varepsilon_{\rm vp} = E_{\rm vp}^{(\alpha-1)}\eta^{-\alpha}\sigma, \qquad (4.17)$$

bei der die viskoplastischen Dehnungen ε^{vp} des fraktionalen Elements als interne Variable auftreten. Das zu lösende Gleichungssystem des fraktionalen Maxwellkörpers besteht aus gewöhnlichen und fraktionalen Differentialgleichungen. Mit der Definition nach GRÜNWALD-LETNIKOV wird die fraktionale Differentialgleichung in die algebraische Form

$$\begin{bmatrix} E_{el}^{-1} & 1 & -1 \\ H_{21} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{j+1} \\ \varepsilon_{vp,j+1} \\ \sigma_{j+1} \lor \varepsilon_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -D_{r,j}^{\alpha} \\ \sigma_{j+1} \lor D\varepsilon_{j+1} \end{bmatrix}$$
(4.18)

 mit

$$H_{21} = -\Delta t^{\alpha} E_{\rm vp}^{(\alpha-1)} \eta^{-\alpha} \tag{4.19}$$

überführt. Die zusätzliche Zeile in Gleichung (4.18) ist für die Steuerung der Belastung notwendig. Der Operator \vee bedeutet *oder*. Für $D \to \infty$ werden Wegrandbedingungen $\hat{\varepsilon} = \varepsilon$ und für D = 0 Kraftrandbedingungen $\hat{\sigma} = \sigma$ vorgegeben. Die Formulierung ist für numerische Berechnungen geeignet. Eine zusätzliche Zeitintegration, zum Beispiel mit dem Kollokationsverfahren [3], ist nicht notwendig, da sie in der Grünwald-Reihenentwicklung in Abhängigkeit der Ableitungsordnung α bereits enthalten ist.

BRODERSEN [13] zeigt, dass ein lineares Spannungs-Dehungsverhalten im Zeitintervall unzureichend ist, um das komplexe Verformungsverhalten des Bitumens abzubilden. Die Viskosität η wird entsprechend mit einem Kriechansatz nach Norton

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\sigma_0^n} \sigma^n \tag{4.20}$$

nichtlinear beschrieben. σ_0 , $\dot{\varepsilon}_0$ und n sind zusätzliche Modellparameter. n beschreibt den Grad der Nichtlinearität, während σ_0 und $\dot{\varepsilon}_0$ Bezugsgrößen sind. Die Differentialgleichung für den fraktionalen Dämpfer wird nun mit

$$D^{\alpha}\varepsilon_{\rm vp} = E_{\rm vp}^{(\alpha-1)} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_0}{\sigma_0^n} \sigma^{(n-1)}\right)^{\alpha} \sigma \tag{4.21}$$

beschrieben. Dadurch ändert sich der Eintrag H_{21} zu

$$H_{21} = -\Delta t^{\alpha} E_{\rm vp}^{(\alpha-1)} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_0}{\sigma_0^n}\right)^{\alpha} \left[\sigma_{j+1}^{(\alpha n-\alpha)}\right] \,. \tag{4.22}$$

4.3.5 Newton-Raphson Verfahren

Beschreibt $\mathbf{z}^T=(\sigma,\varepsilon^{vp},\varepsilon)$ den Vektor der Zustandsgrößen muss das Residuum der konstitutiven Gleichungen

$$\mathbf{r} = \mathbf{z} - f(\mathbf{z}) \stackrel{!}{=} 0 \tag{4.23}$$

erfüllen. Eine Lösung kann iterativ mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren erfolgen [3]. Dies erfordert das Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\mathbf{J}d\mathbf{z} + \mathbf{r} \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \,. \tag{4.24}$$

Im Folgenden bezeichnet der Index k den Iterationszähler des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens und auf die Angabe des Zählers j wird aufgrund der Lesbarkeit verzichtet. Die Einträge der Ableitungsmatrix **J** sind

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_{k+1}} = \begin{bmatrix} E_{el}^{-1} & 1 & -1\\ \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{z}_1} & 1 & 0\\ 1 & 0 & D \end{bmatrix}$$
(4.25)

 mit

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{z}_1} = -\Delta t^{\alpha} E_{\rm vp}^{(\alpha-1)} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_0}{\sigma_0^n}\right)^{\alpha} \left[\left(\sigma_{k+1}\right)^{(\alpha n-\alpha)} \left(\alpha n - \alpha + 1\right) \right] \,. \tag{4.26}$$

Mit der Lösung sind die Änderungen des Vektors der Zustandsgrößen im Iterationsschritt k + 1 ermittelt. Die aktualisierten Zustandsgrößen berechnen sich durch die Summation der Inkremente zu

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k + \Delta \sigma_{k+1} \quad \varepsilon_{\mathrm{vp},k+1} = \varepsilon_{\mathrm{vp},k} + \Delta \varepsilon^{\mathrm{vp},k+1} \quad \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \Delta \varepsilon_{k+1} .$$
(4.27)

Die Iteration ist beendet wenn die inkrementellen Änderungen dz die festgelegte Toleranz unterschreiten. Die aktuellen Größen für das Ende des berechneten Zeitschritts j + 1 sind

$$\mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{z}_j + \Delta \mathbf{z}_{j+1} \,. \tag{4.28}$$

4.3.6 Temperaturabhängige Viskosität

Wie bereits Abbildung 4.1 zeigt, verändert sich die Viskosität bei Änderung der Temperatur. Während des Einbaus wird das Bitumen stark erhitzt, um den Mischprozess zu optimieren. Dabei sind die vorhandenen Temperaturen weit höher als während der Nutzungsphase. Das Werkstoffverhalten gleicht dem einer Newton'schen Flüssigkeit [57]. Der Einfluss der Temperatur kann ab $\theta \geq 100$ °C mit der WALTHER-Gleichung beschrieben werden

$$\log \left[\log(0.95 + \nu) \right] = -m \log(\theta) + c.$$
(4.29)

Dabei ist ν die kinematische Viskosität und θ die absolute Temperatur. c ist eine Konstante mit den Grenzen 8,7 < c < 10,4 [57]. Abweichend wird die Konstante 0,95 auch mit 0,8 oder 1 angegeben [83]. Das Ergebnis für m ist dabei typischerweise 3,0 - 5,0.

Unterhalb von $\theta = 100$ °C wird die Temperaturabhängigkeit üblicherweise mit der WILLIAMS-LANDEL-FERRY-Gleichung (WLF) oder der ARRHENIUS-Gleichung beschrieben. Die WLF-Gleichung

$$log(\alpha_{\theta}) = \frac{-C_1 \left(\theta - \theta_r\right)}{C_2 + \left(\theta - \theta_r\right)}$$
(4.30)

mit den empirisch zu ermittelnden Konstanten C_1 und C_2 , der Referenz- und Versuchstemperatur θ_r bzw. θ sowie dem Verschiebungsfaktor α_{θ} ist auf Temperaturen oberhalb der Glaspunkttemperatur beschränkt [105]. Für Strukturanwendungen von Polymeren ist die WLF-Gleichung damit wenig geeignet, da die üblich auftretenden Temperaturen in der Glasübergangszone bzw. darunter liegen. Die Arrhenius-Gleichung

$$\eta(\theta) = \eta_0 \cdot e^{\left(-\frac{Q}{R\cdot\theta}\right)} \tag{4.31}$$

beschreibt auch unterhalb der Glasübergangszone den Einfluss der Temperatur auf die Viskosität [6, 37]. In Abhängigkeit von der universellen Gaskonstante $R = 8,3143 \cdot 10^{-3} kJ/molK$, der Temperatur θ , der Bezugsviskosität η_0 für $\theta = 0 K$ und der Aktivierungsenergie Q wird damit der Temperatureinfluss auf die Viskosität allgemein beschrieben. Da die Aktivierungsenergie für Bitumen an dieser Stelle unbekannt ist, wird der Argumentation von BRODERSEN [13] gefolgt.

Die Viskosität ist deshalb mit σ_0 , $\dot{\varepsilon}_0$ und dem Exponenten n beschrieben. Von diesen Größen wird σ_0 in Abhängigkeit von der Temperatur θ

$$\sigma_0(\theta) = \sigma_0^{0^{\circ}C} e^{(q_1\theta^2 + q_2\theta)}$$
(4.32)

formuliert. $\dot{\varepsilon}_0$ und *n* werden im gesamten Temperaturspektrum als konstant angenommen. BRODERSEN stellt fest, dass zusätzlich die Steifigkeit $E_{\rm el}$ der Feder wie auch des Dämpfers $E_{\rm vp}$ temperaturabhängig zu beschreiben sind. Auf die Temperaturabhängigkeit von $E_{\rm vp}$ wird verzichtet. Für $E_{\rm el}$ reicht der Ansatz

$$E_{\rm el}(\theta) = E_{\rm el}^{0\,^{\circ}{\rm C}} e^{(q_3\,\theta)} \,. \tag{4.33}$$

Wie in Abschnitt 4.2 beschrieben, hängt das viskoelastische Werkstoffverhalten stark von der Temperatur ab. Das fraktionale Maxwell-Modell beschreibt diesen Zusammenhang mit der Ableitungsordnung α , weshalb α mit

$$\alpha(\theta) = \alpha_1^{0^{\circ}C} - \frac{\alpha_2^{0^{\circ}C}}{e^{(q_4\theta)}}$$
(4.34)

ebenfalls temperaturabhängig formuliert ist.

Die Größen q_1 bis q_4 sind zusätzliche Modellparameter. Die ARRHENIUS-Gleichung ist für den in dieser Arbeit zu untersuchenden Temperaturbereich von -20 °C $\leq \theta \leq 30$ °C hinreichend angenähert. Ein weiterer Vorteil ist, dass die Bezugsgrößen durch die Normierung auf $\theta = 0$ °C physikalisch anschaulich sind.

4.3.7 Mehraxiale Erweiterung

Die Berechnung beliebiger Verformungszustände ist möglich, wenn das Werkstoffgesetz dreidimensional formuliert ist. Dafür sind die bisherigen eindimensionalen Gleichungen zu erweitern. Da die Bestimmung der Materialparameter üblicherweise an eindimensionalen Versuchen erfolgt, sind der ein- und dreidimensionale Zustand zu verknüpfen. Während die Feder mit der Elastizitätsmatrix $C_{\rm bit}$ dies bereits berücksichtigt, ist es für den inelastischen Anteil des

Dämpfers notwendig, eine geeignete Vergleichsspannungshypothese aufzustellen. Auf aufwendige räumliche Versuche kann dann verzichtet werden. Aufbauend auf den vorherigen Arbeiten von GARTUNG, ASCHENBRENNER und BRODERSEN wird eine assoziierte Fließhypothese verwendet, siehe [6, 13, 37].

Durch das fraktionale Dämpferelement treten inelastische Verzerrungen ε_{vp} auf. Für das Bitumen wird angenommen, dass die inelastischen Verzerrungen volumenkonstant sind und somit nur von den deviatorischen Spannungen s abhängig sind. Weiterhin wird angenommen, dass bereits kleinste deviatorische Spannungen einen inelastischen Deformationsanteil besitzen. Außerdemreagiert das Bitumen auf Druck- oder Zugbelastungen in gleicher Weise. Das Fließverhalten wird in beiden Bereichen als gleich angenommen. Bei Anwendung der Fließbedingung nach VON MISES bedeutet dies, dass der Fließzylinder im Hauptspannungsraum auf die hydrostatische Raumdiagonale reduziert wird und der Spannungsdeviator s senkrecht auf der Fließfläche steht. Das plastische Potential Q ist damit der Fließfunktion F äquivalent

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \,. \tag{4.35}$$

Wenn der fraktionale Dämpfer reelle Ableitungsordnungen besitzt, ist die Fließregel

$$D^{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}_{\rm vp} = D^{\alpha} \lambda \mathbf{s} \tag{4.36}$$

entsprechend formuliert. Mit den Dissipationsarbeiten wird der Proportionalitätsfaktor λ bestimmt. Dafür muss die Bedingung, dass die fraktionale Rate im ein- und mehrdimensionalen Zustand gleich ist, erfüllt sein

$$D^{\alpha}A = D^{\alpha}\varepsilon_{\rm vp}\,\mathbf{s} = D^{\alpha}\varepsilon_{\rm vp,v}\,\sigma_{\rm v}\,. \tag{4.37}$$

Die Vergleichsspannung σ_v nach von MISES ist nur von der zweiten Invariante I_2^D des Spannungsdeviators s abhängig

$$\sigma_{\rm v} = \sqrt{3I_2^{\rm D}} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{s}^2} \,. \tag{4.38}$$

Nach Einsetzen in Gleichung (4.37) folgt der Proportionalitätsfaktor

$$D^{\alpha}\lambda = \frac{3}{2}\frac{1}{\sigma_{\rm v}}D^{\alpha}\varepsilon_{\rm vp,v}\,. \tag{4.39}$$

Wird $D^{\alpha} \varepsilon_{vp,v}$ durch die eindimensionale Dämpfergleichung ersetzt, gilt

$$D^{\alpha}\lambda = \frac{3}{2}E_{\rm vp}^{(\alpha-1)} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_0}{\sigma_0^n}\sigma_{\rm v}^{(n-1)}\right)^{\alpha} \tag{4.40}$$

sowie für die mehrdimensionale Formulierung des fraktionalen Dämpfers

$$D^{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{vp}} = \frac{3}{2} E_{\mathrm{vp}}^{(\alpha-1)} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_0}{\sigma_0^n} \sigma_{\mathrm{v}}^{(n-1)} \right)^{\alpha} \mathbf{s} \,. \tag{4.41}$$

Der fraktional formulierte Ausdruck in Gleichung (4.41) geht für $\alpha = 1$ in die bekannte Formulierung eines nichtlinearen Dämpfers über. Für $\alpha = 0$ wird die Bedingung rein deviatorischen Fließens verletzt [13]. Die Ableitungen in Gleichung (4.24) sind für die mehrdimensionale Form neu zu bilden

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{el}^{-1} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & D\mathbf{I} \end{bmatrix}, \qquad (4.42)$$

mit der Identitätsmatrix I,

$$\mathbf{J}_{21} = -\frac{3}{2} \Delta t^{\alpha} E_{vp}^{(\alpha-1)} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_0}{\sigma_0^n}\right)^{\alpha} \sigma_v^{(\alpha n-\alpha)} \left(\left[(\alpha n - \alpha) \frac{1}{\sigma_v} \right] \mathbf{D} \boldsymbol{\sigma} \right]$$
$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_v} \left(\mathbf{D} \boldsymbol{\sigma} \right)^T + \mathbf{D} \right).$$
(4.43)

und dem Deviatoroperator

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$
(4.44)

Das Werkstoffmodell für Bitumen ist damit vollständig hergeleitet. Eine Reihenschaltung bestehend aus dem fraktionalen Maxwell-Modell und einer Hook'schen Feder beschreiben das viskoelastische Verformungsverhalten. Nichtlineare Einflüsse der Temperatur und Spannungen sind zusätzlich mit Potenzansätzen formuliert. Das räumliche Verformungsverhalten ist für den Druck- und Zugbereich mit der Fließhypothese nach v. MISES beschrieben. Die endgültige Formulierung ist

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{el}^{-1} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & D\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{j+1} \\ \varepsilon_{vp,j+1} \\ \sigma_{j+1} \lor \varepsilon_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_{r,j}^{\alpha} \\ \sigma_{j+1} \lor D\varepsilon_{j+1} \end{bmatrix}$$
(4.45)

 mit

$$\mathbf{H}_{21} = -\frac{3}{2} \Delta t^{\alpha} E_{vp}^{\alpha-1} \left(\frac{\varepsilon_0}{\sigma_0^n}\right)^{\alpha} \sigma_v^{\alpha n-\alpha} \mathbf{D} \,. \tag{4.46}$$

4.4 Bestimmung der Modellparameter

Die neun Modellparameter $E_{\rm el}^{0^{\circ}C}$, $E_{\rm vp}^{0^{\circ}C}$, $\dot{\varepsilon}_0$, $\sigma_0^{0^{\circ}C}$, n, α , und q_j sind mit geeigneten Methoden aus vorliegenden Versuchsdaten zu bestimmen. Druck-, Zug- und Kriechversuche gehören für Werkstoffe wie Stahl oder Beton zu den Standardversuchen in der Materialprüfung. Diese, im Straßenwesen unüblichen Versuche, können auf Bitumen und Asphalte übertragen werden. Die Versuche werden im Rahmen der Arbeit von BRODERSEN [13] durchgeführt. Für das eigene Modell werden die hiermit vorhandenen, aufbereiteten Messdaten verwendet. Aus den vorhandenen Messdaten der Bitumenversuche werden die Modellparamter für das fraktionale Maxwellmodell bestimmt.

4.4.1 Evolutionsstrategie

Die vorhandenen Versuche beschreiben sehr unterschiedliche Last- und Temperaturniveaus. Die Beurteilung eines geeigneten Parametersatzes erfordert eine Strategie die entsprechende Simulationen ausführt und den Vergleich mit der großen Bandbreite vorhandener Daten anhand eines Kriteriums bewerten kann. Evolutionsstrategien ermöglichen es, eine Vielzahl an Daten mit einer Zielfunktion zu bewerten, und führen auch bei großen Parametersätzen zum Erfolg. Sie basieren auf stochastischen Verfahren, welche an biologische Evolutionsprozesse angelehnt sind. Eine ausführliche Beschreibung über das Verfahren und Varianten ist in [80] geschildert.



Abbildung 4.10: Evolutionsschema nach [80]

Das zu Grunde liegende Schema der Evolutionsstrategie zeigt Abbildung 4.10. Der Evolutionsprozess beginnt mit einer Initialpopulation, der Elterngeneration. Mit der Elterngeneration wird die Zielfunktion ausgewertet und die Individuen mit der besten Fitnessbewertung selektiert. Ist das Abbruchkriterium nicht erfüllt, entstehen aus den selektierten Individuen durch Rekombination der Parameter Nachkommen. Diese werden mit einer wahrscheinlichkeitsgesteuerten Mutation in vorgegebenen Grenzen verändert. Die Nachkommen werden durch die Zielfunktion bewertet und die besten Nachkommen ersetzen dann die schlechtesten Individuen der Elterngeneration. Die so erzeugte Population wird mit jedem Evolutionsschritt besser an die Problemstellung angepasst. Der Ablauf wird so lange fortgesetzt bis das Abbruchkriterium erfüllt ist. Als Ergebnis steht ein optimierter Parametersatz, der aus den vorgegebenen Parametergrenzen ermittelt ist. Die Wahl der richtigen Parametergrenzen ist für das Ergebnis von entscheidender Bedeutung, da der Evolutionsalgorithmus diese nicht beeinflusst. Sind sie zu eng gewählt, kann das optimale Ergebnis außerhalb des Suchraums liegen. Sind sie dagegen zu weit gewählt, besteht die Möglichkeit, dass der optimale Parametersatz nicht innerhalb der maximalen Anzahl an Durchläufen gefunden wird. In beiden Fällen können die Ergebnisse einen Hinweis auf die zu wählenden Parametergrenzen geben.

Die Zielfunktion bewertet den Vergleich der numerischen Simulation mit den experimentellen Ergebnissen. Die Auswertung erfolgt für jeden einzelnen Parametersatz. Wenn sich diese in einer Generation nicht beeinflussen, kann dieser Schritt gut parallelisiert werden. Dadurch gelingt eine effiziente Ausnutzung moderner CPU-Architekturen sowie eine deutliche Beschleunigung der Parameterbestimmung.

4.4.2 Experimentelle Untersuchung von Bitumen

In Zusammenarbeit mit dem Institut für Straßenbau und Straßenwesen der TU Braunschweig führt BRODERSEN ein Versuchsprogramm von Asphaltwerkstoffen durch. Es werden sowohl Versuche an Asphalt wie auch Bitumen bei verschiedenen Temperaturen und Einwirkungen durchgeführt. Dem Bitumen ist bereits der Fülleranteil beigemischt. Im Folgenden wird diese Mischung als Mastix bezeichnet. Alle ermittelten Ergebnisse beziehen sich auf die Mastix. Dies gilt auch für die Modellparameter aus der Parameterbestimmung. Die Bitumenbasis ist ein unmodifiziertes Bitumen 50/70. Probekörper werden in weggeregelten Zugund Druckversuchen sowie kraftgeregelten Kriechversuchen untersucht. Die mit der Evolutionsstrategie ermittelten Parameter sind in Tabelle 4.2 angegeben. Die Querdehnzahl von Bitumen ist nicht mit der Evolutionsstrategie, sondern durch Voruntersuchungen im elastischen Bereich von Bitumen und Asphalt bestimmt. Abweichend von Empfehlungen, zum Beispiel in [83], die Querdehnzahl über alle Temperaturen auf $\nu = 0,5$ zu setzen, ist eine temperaturabhängige Formulierung gewählt,

$$\nu = -\frac{2.54 \cdot 10^{-2}}{(1.35 \cdot e^{(0.229 \cdot \theta)} + 0.1144)} + 0.49.$$
(4.47)

Abbildung 4.11 zeigt, dass die Querdehnzahl ν für $\theta > 10$ °C gegen inkompressibles Werkstoffverhalten mit $\nu = 0.5$ strebt. Für $\theta < -20$ °C ist $\nu = 0.27$



Abbildung 4.11: Entwicklung von ν in Abhängigkeit der Temperatur θ

ebenfalls konstant. Die Form der Funktion ermöglicht eine kontinuierliche Anpassung an weitere Temperaturbereiche.

Tabelle 4.2: Modellparameter	$\operatorname{Bit}\operatorname{umen}$
(a) Grundparameter	

$E_{\rm el}^{0^{\circ}\rm C}$	$E_{\rm vp}$	$\alpha_1^{0^\circ C}$	$\alpha_2^{0^\circ C}$	$\dot{\varepsilon}_0$	$\sigma_0^{0^{\circ}\mathrm{C}}$	n
$[N/mm^2]$	$[N/mm^2]$	[-]	[-]	[1/s]	$[N/mm^2]$	[-]
215	94,48	0,737	$-4,08 \cdot 10^{-2}$	$8,82 \cdot 10^{-2}$	26,76	1,14

(b) Dimensionslose Faktoren

q_1	q_2	q_3	q_4
$1,86 \cdot 10^{-3}$	$3,2\cdot10^{-1}$	0,11	$9{,}76\cdot10^{-2}$

Weggesteuerte Zug- und Druckversuche

Die nichtlineare Abhängigkeit des mechanischen Verhaltens von der Belastungsgeschwindigkeit wird anhand einaxialer weggeregelter Versuche untersucht. Für die Versuche wird ein prismatischer Probekörper, wie in Abbildung 4.12a dargestellt, verwendet. Zur Simulation verschiedener Temperaturzustände befindet sich der Prüfstand in einer Klimakammer. Die Klebeverbindung zwischen Prisma und Prüfmaschine versagt bei großen Zugbelastungen. Neben den Druckversuchen werden keine weggesteuerten Zugversuche am Prisma durchgeführt. Die Zugkriechversuche können durchgeführt werden, wenn die Zugbelastung ein vielfaches kleiner ist als bei den weggesteuerten Zugversuchen [13].



Abbildung 4.12: Probekörper der Zug-, Druck- und Kriechversuche

Werkstoff	Versuchsart	$\theta [^{\circ}C]$	Dehnrate $\dot{\varepsilon} \left[1/s \right]$
Mastix	Druckversuch	-20; -10; 0	$1 \cdot 10^{-5}; 1 \cdot 10^{-4}; 1 \cdot 10^{-3}$
	Zugversuch	$10;\ 20;\ 30$	$1,4 \cdot 10^{-3}; 5,6 \cdot 10^{-3}; 1,1 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 4.3: Lastniveaus der Mastixversuche (a) Belastung weggeregelte Versuche

(b) Belastung kraftgeregelte Versuche

Werkstoff	Versuchsart	$\theta [^{\circ}C]$	Spannung $\sigma \left[N/mm^2 ight]$
Mastix	Kriechversuch	-20; -10; 0	$0,0625;\ 0,125;\ 0,1875;\ 0,625$

Bereits ab $\theta = 10$ °C ist die Mastix sehr niedrigviskos und kann nicht mehr ordnungsgemäß in die Prüfmaschine eingebaut werden. Dies erfordert eine Änderung des Versuchsaufbaus. Die Versuche werden daher in einem temperierten Wasserbad durchgeführt. Als Probekörper wird lediglich der Zugknochen aus Abbildung 4.12c verwendet. Die kleineren Abmessungen des Zugknochens sowie der Auftrieb durch das Wasser ermöglichen einen ordnungsgemäßen Versuchsablauf. Die in den Versuchen gewählten Lastniveaus sind in Tabelle 4.3 angegeben.

Die im Wasserbad durchgeführten Zugversuche sind in Abbildung 4.13 dargestellt. Gegenübergestellt sind die Spannungs-Dehnungs-Verläufe der mit dem eigenen Modell nach Gleichung (4.45) ermittelten Ergebnisse und der Versuche. Das Werkstoffverhalten kann über den Temperaturbereich von 10 °C $\leq \theta \leq 30$ °C gut abgebildet werden. Die Nichtlinearität nimmt im Vergleich zu den Druckversuchen mit steigender Temperatur ab. Außerdem zeigt sich, dass die Verfestigung ebenfalls mit steigender Temperatur schneller abgeschlossen ist und sich dem Sättigungsspannungsniveau angenähert hat. Dies entspricht zunehmend dem Newton-Dämpfer, was im Modell mit der zunehmenden Ableitungsordnung α berücksichtigt ist. Für $\theta = 10$ °C wird dieser Effekt mit dem Werkstoffmodell leicht überschätzt. Die langfristige Entwicklung der Spannungen ist jedoch gut.

Abbildung 4.14 zeigt die Druckversuche. Ziel der Versuche ist es, die Probekörper bis zu dem festgelegten Endwert $\varepsilon = 0,1$ zu drücken. Für die konstanten Dehnraten ist erkennenbar, wie sich die Spannungen nichtlinear entwickeln und gegen eine Sättigungsspannung streben. In Abbildung 4.14a zeigt sich für $\varepsilon = 1,0 \cdot 10^{-4}$ in der Anfangsphase der Einfluss der Prüfmaschine, die zunächst die geforderte Dehnrate nicht erzeugen kann. Für die Dehnrate $\varepsilon = 1,0 \cdot 10^{-3}$ überschätzt das Werkstoffmodell die Steifigkeit der Mastix. Für $\theta = 0$ °C verbessern sich die Ergebnisse. Die Viskosität des Bitumens nimmt ab. Dies zeigt sich in den geringeren Spannungen. Das qualitative Werkstoffverhalten bleibt jedoch gleich. Für $\varepsilon = 1,0 \cdot 10^{-3}$ werden die Spannungen leicht unterschätzt. Die Abweichung entspricht der Größenordnung der Streuung, wie sie in den Versuchen beobachtet wird. Die Abweichungen zwischen Experiment und numerischer Simulation sind insgesamt gering und weiterhin im Bereich der Versuchsgenauigkeit.



(c) Zugversuche Mastix, $\theta = 30\,^{\circ}\mathrm{C}$

Abbildung 4.13: Zugversuche Mastix



Abbildung 4.14: Druckversuche Mastix

Kraftgesteuerte Kriechversuche

Für $\theta = -20$ °C beträgt die Dauer der Erstbelastung 14.400 s = 4 h. Es folgt eine Entlastungsphase von 28.800 s = 8 h und eine Wiederbelastung über eine Dauer von 3.600 s = 1 h. Die Entlastungsphasen in Abbildung 4.15a unterscheiden sich qualitativ darin, dass bei $\sigma = 0.125 N/mm^2$ erkennbare viskoplastische Dehungsanteile vorhanden sind. Für $\sigma = 0.1875 N/mm^2$ sind die gemessenen Dehnungen in der Entlastungsphase noch viskoelastisch. Weiterhin ist zu beobachten, dass für beide Lastniveaus die Dehnungen auf das gleiche Niveau absinken und auch die Wiederbelastung in beiden Lastfällen identische Dehnungen zeigt. Ein störender Einfluss der Versuchstechnik kann hier nicht ausgeschlossen werden, zumal die experimentelle Datengrundlage sehr gering ist. Die numerische Simulation spiegelt dieses Verhalten nicht wieder, sondern zeigt sowohl unterschiedliche Entlastungs- als auch Wiederbelastungsphasen. Die elastische Steifigkeit für $\sigma = 0.1875 N/mm^2$ wird unterschätzt, so dass die elastischen Dehnungsanteile im Vergleich mit dem Versuch zu groß sind. Für $\theta > -20$ °C wird die Belastung geändert. Die Last soll nun über 36.000s = 10 h konstant gehalten werden. Wie Abbildung 4.15b und Abbildung 4.15c zeigen, enden eine Vielzahl der Versuche bereits vor Erreichen dieser Zeit. Bei diesen Versuchen treten in den Probekörpern Schädigungen unterschiedlicher Art und Größe auf. Da Schädigung im Modell nicht berücksichtigt wird, sind die darüber hinausgehenden Dehnungen nicht dargestellt. Das Werkstoffmodell kann die Belastungsphase gut wiedergeben. Für $\theta = -10$ °C und $\sigma = 0.1875 N/mm^2$ zeigt die Entlastung erneut eine zu große reversible viskose Verformung. Da wiederum nur ein Versuch vorliegt, findet keine abschließende Beurteilung des Phänomens statt. Die Belastungsphasen werden über die Bandbreite an Lastfällen sehr gut abgebildet.

Insgesamt gelingt mit dem vorgestellten Werkstoffmodell eine gute, kontinuierliche Anpassung an die diversen Temperatur- und Lastniveaus. Die größten Abweichungen treten bei sehr tiefen Temperaturen auf. Zur Verbesserung des Werkstoffmodells sind hier weitere Versuchsreihen wünschenswert. Dies gilt auch für die Belastungen, bei denen nur einzelne Ergebnisse verwertet werden können. Da in vielen Versuchen Schädigung auftritt, ist ein entsprechend niedrigeres Lastniveau, bzw. eine kürzere Belastungszeit zu diskutieren. Vor allem bei hohen Temperaturen kann dann die Datengrundlage verbessert werden. Zu beobachten ist, dass für den untersuchten Temperaturbereich das Spannungs-Dehungs-Verhalten pro $\Delta\theta = \pm 10$ °C um $\approx 10^{\pm 1}$ verschoben wird. Dies zeigt deutlich den Einfluss der temperaturabhängigen Mikrostruktur des Bitumens. Das gewählte Bitumenmodell ist mit den vorhandenen Versuchen für den Temperaturbereich -20 °C $\leq \theta \leq 30$ °C validiert und wird im weiteren in einem mikromechanisch begründeten Verbundmodell eingesetzt.



(c) Kriechversuche Mastix, $\theta=0\,^{\circ}\mathrm{C}$

Abbildung 4.15: Kriechversuche Mastix

5 Einführung in die Homogenisierung

Bei der Untersuchung eines Werkstoffs kann man zwischen einer makroskopischen und mikroskopischen Betrachtung unterscheiden. Die Betrachtung auf der Makroebene, der Bauteilebene, ermöglicht es, die beobachteten Eigenschaften in einem integrierenden Werkstoffmodell zu formulieren. Die Eigenschaften der einzelnen Komponenten sind dabei implizit berücksichtigt, wenn ihr Einfluss auf der Makroebene verschmiert wird. Es wird dabei angenommen, dass der Werkstoff eine homogene Verteilung von Struktur und Eigenschaften inne hat, welche an jedem Punkt identisch sind. Phänomenologische Effekte, wie zum Beispiel Kriechen und Relaxation, können zwar beschrieben werden, jedoch ohne die Ursachen zu berücksichtigen. Der Berechnungsaufwand von makroskopischen Modellen ist im Vergleich zu mikroskopischen in natürlicher Weise geringer, weil die ablaufenden Prozesse nicht im einzelnen abgebildet, berechnet und über die Skalen transportiert werden. Dafür ist ein erhöhter experimenteller Aufwand notwendig, wenn die Modellparameter für jeden Probekörper neu anzupassen sind.

Wird die Auflösung erhöht, mit der der Werkstoff betrachtet wird, ist die Annahme eines homogenen Werkstoffs nicht mehr haltbar. Heterogenitäten treten in Form von Einschlüssen, Rissen, Porenräumen und Gitterversetzungen auf. Diese können bereits in situ vorhanden sein oder während der Herstellungs sowie der Nutzungsphase auftreten. Dabei können die Heterogentitäten lokal konzentriert sein, wie etwa bei einem Riss, oder sich gleich- bzw. ungleichmässig im Volumen verteilen. Eine gleichmässige Verteilung kann bei Laminaten auftreten, in welchen die verstärkenden Fasern regelmässig angeordnet sind. Bedingt durch den Mischungsprozess tritt jedoch bei Asphalt oder Beton eine ungleichmässige Einschlussverteilung auf.

Aufgabe der Mikromechanik ist es, kontinuumsmechanische Größen der Makroebene durch mikromechanische Prozesse zu beschreiben. Somit können makroskopische Werkstoffgesetze formuliert werden, die auf Informationen aus der Mikroebene basieren. Die auftretenden Prozesse können dabei den einzelnen Komponenten zugeordnet und somit besser beschrieben werden. Während der Berechnungsaufwand damit zunimmt, können Versuche im Labor reduziert werden. Ein wichtiger Aspekt der Mikromechanik ist die Verknüpfung der unterschiedlichen Betrachtungsebenen. Die dafür verwendeten Mittelungsverfahren werden im Allgemeinen als Homogenisierung bezeichnet. Ziel der verschiedenen Homogenisierungsmethoden ist, einen makroskopischen, effektiven Ersatzwerkstoff zu beschreiben, dessen Eigenschaften möglichst identisch mit denen des heterogenen Ausgangsmaterials sind.

5.1 Grundlagen

Die Vielzahl an untersuchten Werkstoffen hat auch eine Vielzahl an Methoden hervorgebracht und ist weiterhin Thema aktueller Forschung, siehe zum Beispiel [9, 11, 24]. Dabei sind nicht alle Methoden universell anwendbar. Vor allem ist zwischen der Methode der Einheitszelle, der numerischen Homogenisierung und der mikromechanischen Homogenisierung zu unterscheiden. Unabhängig von der verwendeten Methode sind zwischen faserverstärkten und partikelverstärkten Kompositen zu unterscheiden. Mit der Faserverstärkung ist in der Regel eine orthogonale Anisotropie verbunden, welche sich auf die Grundlösungen auswirkt. Je nach Partikelform und -ausrichtung kann auch für partikelverstärkte Komposite eine Anisotropie auftreten, wird jedoch nicht automatisch vorausgesetzt. Ein Komposit besteht mindestens aus zwei Phasen, der Matrix und den Inhomogenitäten welche in der Matrix eingebettet sind. Matrixgrößen sind im Folgenden durch den Index M und Inhomogenitäten mit dem Index I bezeichnet.

5.1.1 Homogenisierungsmethoden

Nahezu alle Homogenisierungsmethoden basieren auf dem Konzept des repräsentativen Volumenelements (RVE). Dieses beschreibt ein Volumen V der Mikrostruktur, welches repräsentativ für die Mikrostruktur steht. Die Abmessungen sind von der Verteilung und Größe der Inhomogenitäten abhängig. Sie sind so zu wählen, dass eine statistisch homogene Verteilung der Inhomogenitäten berücksichtigt wird [39]. Dies ist in der Regel erfüllt, wenn die Größe d der einzelnen Inhomogenität sehr viel kleiner ist als die Abmessung l des RVE, siehe Abbildung 5.1. Dabei darf das RVE auch nicht zu groß gewählt werden da es auf der Makroebene näherungsweise der Ausdehnung eines Punktes entsprechen soll. Ein geeignetes RVE erfüllt die Bedingung

$$d \ll l \ll L \,. \tag{5.1}$$

Die Methode der Einheitszelle ist nur für die Betrachtung periodischer Mikrostrukturen geeignet [1, 70]. Wie Abbildung 5.2a zeigt, wird die periodische Struktur durch eine repräsentative Zelle beschrieben. Durch aneinanderreihen dieser Zelle wird das Kontinuum aufgebaut. Die repräsentative Zelle kann dabei in Unterzellen aufgeteilt werden. So ist es möglich einer Phase variierende Eigenschaften zuzuordnen und Nichtlinearitäten einfacher zu berücksichtigen.

Die numerische Homogenisierung folgt einem sehr allgemeinen Ansatz, weswegen nahezu jedes Materialmodell berücksichtigt werden kann [1]. Dabei wird das RVE hinreichend genau diskret modelliert und dann mit passenden numerischen Verfahren, zum Beispiel der Finite-Element-Methode, berechnet [16]. Lokale Feldgrößen werden im Anschluss über das Volumen gemittelt und die gemittelten Werte als Lösung der Makroebene angenommen. Dabei ist ein ständiger



Abbildung 5.1: Das repräsentative Volumenelement

Austausch zwischen makroskopischer und mikroskopischer Lösung notwendig, sodass eine vollständige Kopplung der beiden Ebenen vorhanden ist. Die große Flexibilität der Methode geht einher mit einem hohen Berechnungsaufwand.

Ziel der mikromechanischen Homogenisierung ist die Ermittlung von Einflusstensoren, die die Auswirkungen der Inhomogenität auf die zu untersuchende Feldgröße beschreiben können. Üblicherweise beschränken sich die entwickelten Verfahren auf die Ermittlung der Einflusstensoren für die Spannungs- und Dehnungsfelder und die dazugehörige effektive Steifigkeit. Mit Verwendung analytischer Verfahren können dabei nur einfache Einschlussgeometrien wie Ellipsen und Linien untersucht werden. Weiterhin beschränken sich die Herleitungen in der Regel auf linear-elastisches Materialverhalten. Es existieren jedoch für viele Verfahren Erweiterungen, die es ermöglichen ausgesuchte viskose und elasto-plastische Werkstoffeigenschaften zu untersuchen. Durch die Limitierung auf bestimmte Werkstoffmodelle und Einschlussgeometrien werden die Verwendungsmöglichkeiten stark eingegrenzt. In den Bereichen, wo eine Anwendung möglich ist, zeichnet sich die mikromechanische Homogenisierung gegenüber den zuvor genannten Methoden durch eine kürzere Berechnungszeit aus. Abweichend von der bisherigen Schreibweise wird für die folgenden Erläuterungen die Tensorschreibweise verwendet.



Abbildung 5.2: Modellevereinfachungen der verschiedenen Methoden

5.1.2 Die Eshelby-Lösung

Die ermittelten analytischen Lösungen der mikromechanischen Homogenisierung beruhen nahezu alle auf einer Grundlösung. Die ESHELBY-Lösung, nach J.D. Eshelby (1916 - 1981), beschreibt den Fall eines ellipsoiden Einschlusses Ω in einer unendlich ausgedehnten Matrix, siehe Abbildung 5.3. Der Einschluss Ω bezeichnet allgemein eine räumlich ausgedehnte, konstante und spannungsfreie Eigendehnung ϵ^t . Unter der Annahme das die Verformungen infinitesimal klein sind und sich die Dehnungen

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{\rm el} + \epsilon_{ij}^{\rm t} \tag{5.2}$$

addieren, sind die Dehnungen ϵ innerhalb des Einschlusses ebenfalls konstant [1, 39, 111]. Über den vierstufigen Eshelbytensor S sind die Gesamtdehnungen linear von den Eigendehnungen ϵ^{t} abhängig

$$\epsilon_{ij} = \mathbb{S}_{ijkl} \epsilon_{kl}^t = const. \text{ in } \Omega.$$
(5.3)

Die ebenfalls konstanten Spannungen σ berechnen sich mit dem Einheitstensor vierter Stufe $\mathbb I$ und dem Elastitzitätstensor $\mathbb C$ zu

$$\Sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} : (\mathbb{S}_{ijkl} - \mathbb{I}_{ijkl}) \,\epsilon_{kl}^{t} = const \text{ in } \Omega.$$
(5.4)

Ausserhalb des Einschlusses Ω sinken die Spannungen mit r^{-3} für den Radius $r \to \infty$ ab. Der Eshelbytensor ist nur von den Hauptachsen des Ellipsoids a_i , deren Orientierung im Koordinatensystem und den Materialeigenschaften der Matrix abhängig [39]. In den vorderen und hinteren Indizes ist S symmetrisch nicht aber in Hinsicht auf die Vertauschung des vorderen und hinteren Paars,

$$\mathbb{S}_{ijkl} = \mathbb{S}_{jikl} = \mathbb{S}_{ijlk} \,, \tag{5.5}$$

$$\mathbb{S}_{ijkl} \neq \mathbb{S}_{klij} \,. \tag{5.6}$$



Abbildung 5.3: ESHELBY-Problem

Aus dem Ellipsoid lassen sich Spezialfälle ableiten. Die länglichen Ausdrücke der einzelnen Einträge des Eshelbytensors sind in MURA [71] aufgeführt. Für isotrope, kugelförmige Einschlüsse ist er auf

$$\mathbb{S}_{ijkl} = \chi \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \xi (\mathbb{I}_{ijkl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl})$$
(5.7)

 mit

$$\chi = \frac{1 - \nu}{3(1 - \nu)} = \frac{3K}{3K + 4\mu}, \qquad (5.8)$$

$$\xi = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)} = \frac{6(K+2\mu)}{5(3K+4\mu)}, \qquad (5.9)$$

reduziert. Für diesen Sonderfall können die Spannungen und Dehnungen in einen volumenkonstanten und einen deviatorischen Anteil aufgeteilt werden

$$\epsilon_{kk} = \chi \epsilon_{kk}^{\mathrm{t}} \,, \tag{5.10}$$

$$e_{ij} = \xi e_{ij}^{\mathrm{t}} \text{ in } \Omega \,. \tag{5.11}$$

5.1.3 Volumenmittelwerte und die Hill-Bedingung

Jeder Punkt auf der Makroebene wird durch ein RVE auf der Mikroebene beschrieben. Die Makrogrößen $\langle \cdot \rangle$ am Punkt werden dabei durch die Mittelwerte der nicht konstanten Spannungs- und Dehnungsfelder im betrachteten VolumenV beschrieben

$$\langle \Sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_{V} \Sigma_{ij}(x) dV,$$
 (5.12)

$$\langle \epsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_{V} \epsilon_{ij}(x) dV.$$
 (5.13)

Wenn auf der Mikroebene das vom Ort \boldsymbol{x} abhängige Spannungs-Dehnungsverhalten mit

$$\Sigma_{ij}(x) = \mathbb{C}_{ijkl}(x)\epsilon_{kl}(x) \tag{5.14}$$

beschrieben ist, muss mit dem effektiven Steifigkeitstensor \mathbb{C}^{eff} für das gleiche Gebiet auf der Makroebene

$$\langle \Sigma_{ij} \rangle = \mathbb{C}_{ijkl}^{\text{eff}} \langle \epsilon_{kl} \rangle \tag{5.15}$$

gelten. Dies ist eingehalten, wenn die HILL-Bedingung erfüllt ist. Sie fordert, dass im Volumen V für die Formänderungsenergie

$$\langle U \rangle = \langle \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \epsilon_{kl} \rangle = \frac{1}{2} \langle \epsilon_{ij} \rangle \mathbb{C}_{ijkl}^{\text{eff}} \langle \epsilon_{kl} \rangle$$
(5.16)

gilt, unabhängig davon ob eine mikroskopische oder makroskopische Betrachtung vorgenommen wird. Aufgrund der Lesbarkeit wird im Weiteren auf die Angabe der Indizes der Tensoren verzichtet.

5.1.4 Effektive Materialeigenschaften

Der Fall des einzelnen Einschlusses in einer unendlich ausgedehnten Matrix ermöglicht auch die Berechnung von effektiven Materialeigenschaften. Hierbei beschreibt der Einschluss nun ein von den Materialeigenschaften zur Umgebung unterschiedliches Volumen. Dazu wird das Problem in Abbildung 5.4 betrachtet. Die Ausgangssituation wird durch ein heterogenes Material mit der ortsabhängigen Steifigkeit $\mathbb{C}(x)$ und der einwirkenden Randverschiebung \hat{u} beschrieben. Das Randwertproblem ist mit

$$\Sigma_{ij,j} = 0, \qquad \Sigma = \mathbb{C}(x)\epsilon, \qquad u\Big|_{\partial V} = \hat{u}$$
(5.17)

beschrieben. Die Volumenkräfte sind dabei vernachlässigt. Die Belastung wird nun auf einen beliebigen, homogenen Vergleichswerkstoff mit der Steifigkeit \mathbb{C}_0 übertragen. Mit den so entstehenden Feldern

$$\Sigma_{ij,j}^{0} = 0, \qquad \Sigma_{0} = \mathbb{C}_{0}\epsilon_{0}, \qquad u_{0}\big|_{\partial V} = \hat{u}$$
(5.18)

bilden sich die Differenzfelder

$$\bar{u}_k = u - u_0 \quad \text{und} \quad \bar{\epsilon} = \epsilon - \epsilon_0 \,.$$
 (5.19)

Daraus folgt für die Differenzspannung

$$\begin{split} \bar{\Sigma} &= \Sigma - \Sigma_0 = \mathbb{C}(x)\epsilon - \mathbb{C}_0 \left(\epsilon - \bar{\epsilon}\right) \\ &= \mathbb{C}_0 \left(\bar{\epsilon} + \mathbb{C}_0^{-1} \left(\mathbb{C}(x) - \mathbb{C}_0\right)\epsilon\right) \\ &= \mathbb{C}_0 \left(\bar{\epsilon} - \epsilon^{\mathrm{t}}\right) \end{split}$$
(5.20)

und für die Differenzfelder

$$\bar{\Sigma}_{ij,j}^{0} = 0, \qquad \bar{\Sigma}_{0} = \mathbb{C}_{0} \left(\bar{\epsilon} - \epsilon^{\mathrm{t}} \right), \qquad \bar{u} \big|_{\partial V} = 0.$$
(5.21)

Die anfängliche Problemstellung hat sich damit auf ein homogenes Material mit Randbelastung sowie ein homogenes Material mit einer der Heterogenität äquivalenten Eigendehnung $\epsilon^{\rm t}$ aufgeteilt. Dieses kann zum Beispiel mit der EshELBY-Lösung bestimmt werden.

Mit dem Spezialfall ellipsoider Einschlüsse und dem Matrixmaterial als gewähltes Vergleichsmaterial ist die äquivalente Eigendehnung

$$\epsilon^{t}(x) = -\mathbb{C}_{M}^{-1} : (\mathbb{C}_{I} - \mathbb{C}_{M}) : (\bar{\epsilon}(x) + \hat{\epsilon}) .$$
(5.22)



Abbildung 5.4: Homogenisierung bei heterogenen Einschlüssen nach [39]

Dabei ist $\hat{\epsilon}$ ein vorgegebener Dehnungszustand infolge der im Unendlichen liegenden Randverschiebung. Mit dem Eshelbytensor folgt

$$\bar{\epsilon} = \mathbb{S} : \epsilon^{\mathrm{t}} \,. \tag{5.23}$$

Die äquivalente Eigendehnung im Einschluss Ω wird nun in Abhängigkeit der äußeren Belastung $\hat{\epsilon}$ durch

$$\epsilon^{t} = -\left[\mathbb{S} + (\mathbb{C}_{\mathrm{I}} - \mathbb{C}_{\mathrm{M}})^{-1} : \mathbb{C}_{\mathrm{M}}\right]^{-1} : \hat{\epsilon}$$
(5.24)

ausgedrückt. Daraus folgt, dass die Gesamtverzerrung in der Inhomogenität durch

$$\epsilon = \left[\mathbb{I} + \mathbb{S} : \mathbb{C}_{\mathrm{M}}^{-1} : (\mathbb{C}_{\mathrm{I}} - \mathbb{C}_{\mathrm{M}})\right]^{-1} : \hat{\epsilon}$$
(5.25)

beschrieben wird. Dabei ist

$$\mathbb{A}_{I}^{\infty} = \left[\mathbb{I} + \mathbb{S} : \mathbb{C}_{M}^{-1} : (\mathbb{C}_{I} - \mathbb{C}_{M})\right]^{-1}$$
(5.26)

der Einflusstensor. Wird analog zu der gezeigten Ausführung eine Spannung $\hat{\Sigma}$ im Unendlichen als Belastung angesetzt, ermittelt sich daraus der Einflusstensor B_1^{∞} . Da für die hier gestellten Randwertaufgaben das Gebiet nur homogene Spannungs- und Dehnungsfelder erfahren soll, werden für die Randbedingungen die Forderungen nach linearen Verschiebungen und gleichförmigen Spannungen aufgestellt,

$$\langle \epsilon \rangle = \hat{\epsilon} , \qquad \langle \Sigma \rangle = \hat{\Sigma} .$$
 (5.27)

Die Spannungen und Dehnungen im betrachten Volumen V sind damit direkt von $\hat{\epsilon}$ und $\hat{\Sigma}$ abhängig. Dabei beinhalten die Einflusstensoren \mathbb{A} und \mathbb{B} die vollständige Lösung der Randwertprobleme und sind von der Mikrostruktur abhängig. Daraus folgt für die Bestimmung der effektiven Materialparameter

$$\mathbb{C}_{\text{eff}}^{A} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle , \qquad (5.28)$$

$$\mathbb{C}_{\text{eff}}^{\text{B}} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{B} \rangle \,. \tag{5.29}$$

Eine eindeutige Lösung für den effektiven Steifigkeitstensor $\mathbb{C}^{\mathrm{eff}}$ ist bestimmt, wenn

$$\mathbb{C}_{\text{eff}}^{\text{A}} = \mathbb{C}_{\text{eff}}^{\text{B}} = \mathbb{C}_{\text{eff}} \tag{5.30}$$

erfüllt ist.

Die Vielzahl der verschiedenen mikromechanischen Homogenisierungsverfahren haben alle das Ziel die Einflusstensoren zu bestimmen. Dabei unterscheiden sie sich in der Wahl ihrer Randbedingungen. So ist nicht jedes Verfahren für jede Fragestellung anwendbar. Allen ist jedoch die Grundlösung des Eshelbytensors gemein.

5.2 Homogenisierungsverfahren

Die Vielzahl an vorhandenen Mikrostrukturen unterscheiden sich nicht nur durch die Materialeigenschaften, sondern auch durch ihre Geometrien. Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf Partikel-Matrix-Mikrostrukturen. Die Partikel haben dabei die Form einer Kugel. Für den Eshelbytensor gilt damit die Lösung nach Gleichung (5.7). Ausführliche Herleitungen und weiterführende Erläuterungen zu den vorgestellten Modellen sind zum Beispiel in [1, 39, 111] angegeben.

5.2.1 Voigt- und Reuss-Schranken

Nicht immer ist es möglich Gleichung (5.30) zu erfüllen. Das bedeutet aber nicht, dass die Ergebnisse keine Aussagekraft oder Anwendungsbereiche besitzen. Die einfachsten Annahmen hinsichtlich der Wahl der Randbedingungen und der Mikrostruktur sind nach VOIGT

$$\langle \epsilon_{\rm I} \rangle = \langle \epsilon_{\rm M} \rangle = \hat{\epsilon} \tag{5.31}$$

und Reuss

$$\langle \sigma_{\rm I} \rangle = \langle \sigma_{\rm M} \rangle = \hat{\sigma} \,.$$
 (5.32)

Gleichung (5.31) setzt die Gleichheit der Dehnungsfelder in der Matrix und dem Einschluss voraus und entspricht einer Parallelschaltung zweier Federn. Die Annahme nach REUSS in Gleichung (5.32) hingegen setzt die Spannungsfelder gleich und entspricht damit einer Reihenschaltung bestehend aus zwei Federn. Die beiden Annahmen erzeugen Schranken für die Einflusstensoren. Während der VOIGT-Ansatz nur den Einflusstensor A bestimmt, bestimmt der REUSS-Ansatz den Einflusstensor B. Die dazugehörigen Randwertprobleme werden mit dem Minimum des Gesamtpotentials gelöst [111]. Daraus folgt, dass entweder die lokalen Gleichgewichtsbedingungen oder die Kompatibilität der lokalen Verschiebungsfelder verletzt sind.

Für den Fall phasenweise isotropen Materials wird der Steifigkeitstensor vereinfacht durch den KompressionsmodulK

$$K_{\text{eff}}^{\text{Voigt}} = c_{\text{I}}K_{\text{I}} + c_{\text{M}}K_{\text{M}} \ge K_{\text{eff}} \ge \frac{K_{\text{I}}K_{\text{M}}}{c_{\text{I}}K_{\text{M}} + c_{\text{M}}K_{\text{I}}} = K_{\text{eff}}^{\text{Reuss}}$$
(5.33)

und den Schubmodul μ

$$\mu_{\text{eff}}^{\text{Voigt}} = c_{\text{I}}\mu_{\text{I}} + c_{\text{M}}\mu_{\text{M}} \ge \mu_{\text{eff}} \ge \frac{\mu_{\text{I}}\mu_{\text{M}}}{c_{\text{I}}\mu_{\text{M}} + c_{\text{M}}\mu_{\text{I}}} = \mu_{\text{eff}}^{\text{Reuss}}$$
(5.34)

ausgedrückt. $c_{\rm I}$ und $c_{\rm M}$ beschreiben den Volumenanteil der Einschlüsse bzw. der Matrix und es ist

$$c_{\rm I} = 1 - c_{\rm M} \,.$$
 (5.35)

Die Reihen- und Parallelschaltung stellen Sonderfälle der Mikrostrukur dar. Ein ungeordnetes, heterogenes Material ist zwischen diesen beiden Fällen einzusortieren. Damit bilden das VOIGT- und REUSS-Verfahren die äußersten Schranken zwischen denen die effektive Steifigkeit einzuordnen ist.

5.2.2 Hashin-Shtrikman-Variationsprinzip

Die VOIGT- und REUSS-Schranken sind sehr weit gefasst. Eine bessere Eingrenzung der effektiven Steifigkeit folgt aus dem Verfahren nach HASHIN-SHTRIKMAN [41]. Durch Anwendung des für heterogene Materialien entwickelten Variationsprinzips werden nicht die gesamten Spannungs- und Dehnungsfelder betrachtet sondern nur ausgewählte Hilfsfelder. Der Approximationsfehler wird dadurch minimiert. Eine vollständige Herleitung ist in [1, 39, 111] angegeben.

Für ein zweiphasiges Komposit gilt allgemein die untere Schranke

$$\mathbb{C}_{\text{eff}}^{\text{HS-}} = \mathbb{C}_{\text{M}} + c_{\text{I}} \left[(\mathbb{C}_{\text{I}} - \mathbb{C}_{\text{M}})^{-1} + c_{\text{M}} \mathbb{S}_{\text{M}} : \mathbb{C}_{\text{M}}^{-1} \right]^{-1}$$
(5.36)

und die obere Schranke

$$\mathbb{C}_{\text{eff}}^{\text{HS}+} = \mathbb{C}_{\text{I}} + c_{\text{M}} \left[(\mathbb{C}_{\text{M}} - \mathbb{C}_{\text{I}})^{-1} + c_{\text{I}} \mathbb{S}_{\text{I}} : \mathbb{C}_{\text{I}}^{-1} \right]^{-1} .$$
 (5.37)

Der Sonderfall phasenweise isotropen Materials kann ebenfalls mit dem Kompressionsmodul

$$K_{\text{eff}}^{\text{HS-}} = K_{\text{M}} + c_{\text{I}} \left(\frac{1}{K_{\text{I}} - K_{\text{M}}} + \frac{3c_{\text{M}}}{3K_{\text{M}} + 4\mu_{\text{M}}} \right)^{-1} \le K_{\text{eff}}$$
$$\le K_{\text{I}} + c_{\text{M}} \left(\frac{1}{K_{\text{M}} - K_{\text{I}}} + \frac{3c_{\text{I}}}{3K_{\text{I}} + 4\mu_{\text{I}}} \right)^{-1} = K_{\text{eff}}^{\text{HS+}}$$
(5.38)

und dem Schubmodul

$$\mu_{\text{eff}}^{\text{HS-}} = \mu_{\text{M}} + c_{\text{I}} \left(\frac{1}{\mu_{\text{I}} - \mu_{\text{M}}} + \frac{6c_{\text{M}} \left(K_{\text{I}} + 2\mu_{\text{I}} \right)}{5\mu_{\text{M}} \left(3K_{\text{M}} + 4\mu_{\text{M}} \right)} \right)^{-1} \\ \leq \mu_{\text{I}} + c_{\text{M}} \left(\frac{1}{\mu_{\text{M}} - \mu_{\text{I}}} + \frac{6c_{\text{I}} \left(K_{\text{I}} + 2\mu_{\text{I}} \right)}{5\mu_{\text{I}} \left(3K_{\text{I}} + 4\mu_{\text{I}} \right)} \right)^{-1} = \mu_{\text{eff}}^{\text{HS+}}$$
(5.39)

ausgedrückt werden. Die HASHIN-SHTRIKMAN-Grenzen sind deutlich enger gefasst als nach VOIGT und REUSS und ermöglichen damit eine bessere Abschätzung der effektiven Werkstoffparameter.

5.2.3 Dünne Defektverteilung



Abbildung 5.5: Modellvorstellung Dünne Defektverteilung nach [39]

Folgt man der Annahme, dass die Einschlüsse sehr dünn in der Matrix verteilt sind und damit $c_I \ll 1$ erfüllt ist, findet keine Wechselwirkung zwischen den Einschlüssen und dem Rand des RVE statt. Es kann dann ein einzelner Einschluss in der Matrix mit den homogenen Feldern $\langle \Sigma \rangle = \hat{\Sigma}$ oder $\langle \epsilon \rangle = \hat{\epsilon}$ betrachtet werden, dargestellt in Abbildung 5.5. Die Modellvorstellung wird dünne Defektverteilung genannt. Die Bedingung nach Gleichung (5.30) kann nicht erfüllt werden. Mit der Eshelbylösung folgt der effektive Steifigkeitstensor für den Fall konstanter Dehnungen zu

$$\mathbb{C}_{\text{eff}}^{\text{DD}} = \mathbb{C}_{\text{M}} + c_{\text{I}} \left(\mathbb{C}_{\text{I}} - \mathbb{C}_{\text{M}} \right) : \mathbb{A}_{\text{I}}^{\infty} .$$
(5.40)

Für den Fall isotroper, kugelförmiger Einschlüsse in einer isotropen Matrix gilt

$$K_{\rm eff}^{\rm DD} = K_{\rm M} + c_{\rm I} \frac{(K_{\rm I} - K_{\rm M}) K_{\rm M}}{K_{\rm M} + \chi (K_{\rm I} - K_{\rm M})}, \qquad (5.41)$$

$$\mu_{\rm eff}^{\rm DD} = \mu_{\rm M} + c_{\rm I} \frac{(\mu_{\rm I} - \mu_{\rm M}) \,\mu_{\rm M}}{\mu_{\rm M} + \xi \,(\mu_{\rm I} - \mu_{\rm M})} \tag{5.42}$$

mit χ und ξ nach Gleichung (5.8) bzw. Gleichung (5.9).

5.2.4 Mori-Tanaka-Modell



Abbildung 5.6: Modellvorstellung Mori-Tanaka-Modell nach [39]

Erhöht sich der Anteil der Einschlussvolumina ist die Modellvorstellung der dünnen Defektverteilung nicht mehr gültig, da die Einschlüsse sich gegenseitig beeinflussen. Abbildung 5.6 zeigt eine Verbesserung der Annahme. Dabei ist die Randbedingung für das RVE durch die effektive Belastung des Spannungsfeldes $\langle \Sigma_{\rm M} \rangle$ und des Dehnungsfeldes $\langle \epsilon_{\rm M} \rangle$ der Matrix angenähert [67]. Der effektive Steifigkeitstensor für das MORI-TANAKA-Modell ist dann mit

$$\mathbb{C}_{\text{eff}}^{\text{MT}} = \mathbb{C}_{\text{M}} + c_{\text{I}}(\mathbb{C}_{\text{I}} - \mathbb{C}_{\text{M}}) : \mathbb{A}_{\text{I},\text{MT}}$$
(5.43)

und

$$\mathbb{A}_{\mathrm{I},\mathrm{MT}} = (c_{\mathrm{I}}\mathbb{I} + c_{\mathrm{M}}\mathbb{A}_{\mathrm{I}}^{\infty})^{-1} \tag{5.44}$$

gegeben.

Die Bedingung aus Gleichung (5.30) wird vom Modell erfüllt und stellt damit die Kontinuität der Spannungs- und Verschiebungsfelder an den Phasenübergängen sicher. Mit isotropen, kugelförmigen Einschlüssen gilt

$$K_{\text{eff}}^{\text{MT}} = K_{\text{M}} + c_{\text{I}} \frac{(K_{\text{I}} - K_{\text{M}})K_{\text{M}}}{K_{\text{M}} + \chi(1 - c_{\text{I}})(K_{\text{I}} - K_{\text{M}})}, \qquad (5.45)$$

$$\mu_{\text{eff}}^{\text{MT}} = \mu_{\text{M}} + c_{\text{I}} \frac{(\mu_{\text{I}} - \mu_{\text{M}})\mu_{\text{M}}}{\mu_{\text{M}} + \xi(1 - c_{\text{I}})(\mu_{\text{I}} - \mu_{\text{M}})} \,.$$
(5.46)

Durch die Verwendung der Mittelwerte wird die Fluktuation der Felder nicht berücksichtigt [39]. Das bedingt, dass die Lösung für $c_{\rm I} \rightarrow 1$ keine Gültigkeit mehr hat, da die Homogenität der Felder nicht mehr gegeben ist. Formal kann das Modell im Bereich $0 \le c_{\rm I} \le 1$ eingesetzt werden.

5.2.5 Generalisierte Selbstkonsistenzmethode



Abbildung 5.7: Modellvorstellung des GSCS

Bei den bisherigen Modellen ist eine der Grundannahmen, dass ein Einschluss in einer homogenen Matrix eingebettet ist. Dies ist nicht immer der Fall. So haben Polykristalle keine ausgezeichnete Matrixphase [39]. Für solche Materialien ist die Selbstkonsistenzmethode entwickelt. Ihr liegt die Annahme zugrunde, dass der Einschluss in das äquivalente homogene Material eingebettet ist, das die umliegenden Einschlüsse berücksichtigt. Die Lösung folgt dann entsprechend der dünnen Defektverteilung indem die Matrixphase durch das effektive Material ersetzt wird. Die Ermittlung der effektiven Steifigkeit erfolgt iterativ.

CHRISTENSEN/Lo [20] entwickeln die Methode zum sogenannten Generalized Self-Consistent Scheme (GSCS) weiter. Dabei ist der Einschluss von einer dünnen Matrixphase umgeben, die wiederum in das äquivalente homogene Medium eingebettet ist, siehe Abbildung 5.7. Eine geschlossene Lösung wird für den Spezialfall kugelförmiger Einschlüsse auf Grundlage von Energiebetracht ungen hergeleitet. Die vollständige Herleitung ist in [20] angegeben. Der effektive Schubmodul ist mit Hilfe der Eshelbylösung ermittelt. Dabei ist die Verformungsenergie U des in Abbildung 5.7 gezeigten Modells

$$U = U_0 - \frac{1}{2} \int_{S} (T_0 u_e - T_e u_0) dS.$$
 (5.47)

 U_0 ist die Verformungsenergie ohne Einschluss, S die Oberfläche des Einschlusses und T_0 bzw. u_0 die Spannungen und Verschiebungen im Modell ohne Einschluss. Entsprechend sind T_e und u_e die genannten Größen wenn ein Einschluss

vorhanden ist. Durch diese Bedingung und die Kontinuitätsbedingung an den Phasenübergängen r = a und r = b können die Unbekannten gelöst und der effektive Schubmodul aus der expliziten, quadratischen Gleichung

$$\left(\frac{\mu_{\text{eff}}^{\text{GSCS}}}{\mu_{\text{M}}}\right)^2 A + \left(\frac{\mu_{\text{eff}}^{\text{GSCS}}}{\mu_{\text{M}}}\right) B + D = 0$$
(5.48)

ermittelt werden. Von den zwei auftretenden Lösungen ist eine nicht physikalisch und wird verworfen. Die Konstanten A, B und D sind

$$\begin{split} A &= 8 \left[\mu_{\rm I} / \mu_{\rm M} - 1 \right] (4 - 5\nu_{\rm M}) \eta_{\rm I} c_{\rm I}^{10/3} - 2 \left[63(\mu_{\rm I} / \mu_{\rm M} - 1)\eta_{\rm 2} + 2\eta_{\rm I} \eta_{\rm 3} \right] c_{\rm I}^{7/3} \\ &+ 252 \left[\mu_{\rm I} / \mu_{\rm M} - 1 \right] \eta_{\rm 2} c_{\rm I}^{5/3} - 50 \left[\mu_{\rm I} / \mu_{\rm M} - 1 \right] (7 - 12\nu_{\rm M} + 8\nu_{\rm M}^2) \eta_{\rm 2} c_{\rm I} \\ &+ 4(7 - 10\nu_{\rm M}) \eta_{\rm 2} \eta_{\rm 3} , \qquad (5.49) \\ B &= -4 \left[\mu_{\rm I} / \mu_{\rm M} - 1 \right] (1 - 5\nu_{\rm M}) \eta_{\rm 1} c_{\rm I}^{10/3} + 4 \left[63(\mu_{\rm I} / \mu_{\rm M} - 1) \eta_{\rm 2} + 2\eta_{\rm I} \eta_{\rm 3} \right] c_{\rm I}^{7/3} \\ &- 504 \left[\mu_{\rm I} / \mu_{\rm M} - 1 \right] \eta_{\rm 2} c_{\rm I}^{5/3} + 150 \left[\mu_{\rm I} / \mu_{\rm M} - 1 \right] (3 - \nu_{\rm M}) \nu_{\rm M} \eta_{\rm 2} c_{\rm I} \\ &+ 3(15\nu_{\rm M} - 7) \eta_{\rm 2} \eta_{\rm 3} , \qquad (5.50) \\ D &= 4 \left[\mu_{\rm I} / \mu_{\rm M} - 1 \right] (5\nu_{\rm M} - 7) \eta_{\rm 1} c_{\rm I}^{10/3} - 2 \left[63(\mu_{\rm I} / \mu_{\rm M} - 1) \eta_{\rm 2} + 2\eta_{\rm 1} \eta_{\rm 3} \right] c_{\rm I}^{7/3} \\ &+ 252 \left[\mu_{\rm I} / \mu_{\rm M} - 1 \right] \eta_{\rm 2} c_{\rm I}^{5/3} + 25 \left[\mu_{\rm I} / \mu_{\rm M} - 1 \right] (\nu_{\rm M}^2 - 7) \eta_{\rm 2} c_{\rm I} \\ &- (7 - 5\nu_{\rm M}) \eta_{\rm 2} \eta_{\rm 3} \qquad (5.51) \end{split}$$

 mit

$$\eta_{1} = [\mu_{\rm I}/\mu_{\rm M} - 1](49 - 50\nu_{\rm I}\nu_{\rm M}) + 35(\mu_{\rm I}/\mu_{\rm M})(\nu_{\rm I} - 2\nu_{\rm M}) + 35(2\nu_{\rm I} - \nu_{\rm M}), \qquad (5.52)$$

$$\eta_2 = 5\nu_1[\mu_1/\mu_M - 8] + 7[\mu_1/\mu_M + 4], \qquad (5.53)$$

$$\eta_3 = (\mu_{\rm M}/\mu_{\rm M})(8 - 10\nu_{\rm M}) + (7 - 5\nu_{\rm M}).$$
(5.54)

Die Lösung für den effektiven Kompressionsmodul gibt CHRISTENSEN [21] mit

$$K_{\text{eff}}^{\text{GSCS}} = K_{\text{M}} + \frac{c_{\text{I}}(K_{\text{I}} - K_{\text{M}})}{1 + (1 - c_{\text{I}})\frac{(K_{\text{I}} - K_{\text{M}})}{(K_{\text{M}} + \frac{4}{3}\mu_{\text{M}})}}$$
(5.55)

an und bestätigt damit die Lösung von ${\rm HASHIN}$ [40] für das Kompositkugelmodell.

HERVÉ/ZAOUI [42] erweitern das Modell auf *n*-Phasen und BENVENISTE [8] bestätigt die Ergebnisse von CHRISTENSEN/Lo durch eine alternative Herleitung. Vor allem wird die Annahme bestätigt das $c_{\rm I} = (a/b)^3$ ist. CHRISTENSEN [19] zeigt die Gültigkeit der Formulierung für den ganzen Bereich von $c_{\rm I}$. Damit ist das GSCS nicht nur formal sondern auch kontinuumsmechanisch abgesichert und für Einschlussvolumina $c_{\rm I} \rightarrow 1$ anwendbar. Die Zusammenhänge aus Gleichung (5.48) bis Gleichung (5.55) verdeutlichen Abbildung 5.8 und Abbildung 5.9. Für die Beispiele sind die Steifigkeitsverhältnisse $K_I/K_M = 10, K_I/K_M = 100, \mu_I/\mu_M = 10$ und $\mu_I/\mu_M = 100$ gewählt. Untersucht, aber nicht dargestellt sind die Einflüsse für $K_M \to K_I$ bzw. $\mu_M \to \mu_I$. In beiden Fällen nimmt die Nichtlinearität stetig ab, bis sich für $K_I = K_M$ bzw. $\mu_I = \mu_M$ für jedes c_I ein horizontaler Verlauf mit $K_{eff}/K_M = 1$ bzw. $\mu_{eff}/\mu_M = 1$ einstellt.

In Abbildung 5.8 strebt der Schubmodul der Matrix μ_M gegen den Kompressionsmodul der Einschlüsse K_I . Der Funktionsverlauf ist für kleine μ_M zunächst stark nichtlinear. Mit anwachsendem μ_M nähert sich die Funktion asymptotisch dem Verlauf einer Geraden an.

Abbildung 5.9 zeigt die Entwicklung des Schubmoduls μ_{eff} in Abhängigkeit der Querdehnzahlen ν_j . Dafür ist jeweils die Querdehnzahl der Matrix oder der Einschlüsse konstant zu $\nu = 0.5$ gesetzt, während für die entsprechend andere Querdehnzahl gilt $\nu \to 0.5$. Abbildung 5.9a und Abbildung 5.9b zeigen, dass für konstante ν_M der Einfluss von ν_I sehr gering ist. Ein deutlicher Einfluss ist erst für große Verhältnisse von K_I/K_M zu erkennen. Wird ν_M variiert und strebt gegen volumenkonstantes Materialverhalten, sind die Auswirkungen besonders deutlich. Insbesondere für $0.5 \le c_I \le 0.9$ ist in Abbildung 5.9d zu erkennen, dass die Steifigkeit stark zunimmt. Der Funktionsverlauf kann hierbei vereinfacht mit einem abschnittsweise linearen Verlauf angenähert werden.



Abbildung 5.8: GSCS Kompressionsmodul


Abbildung 5.9: GSCS Schubmodul

Die Fragestellung der generalisierten Selbstkonsistenzmethode ist Thema aktueller Forschung. Du/ZHENG [26, 27] entwickeln das implizite *Effective Self-Consistent Scheme (ESCS)* und das daraus abgeleitete explizite *Interaction Direct Derivative (IDD)*. Beide Verfahren können vom Ellipsoid abweichende Geometrien berücksichtigen und werden in [48] ausführlich diskutiert. Erweiterungen für nichtlineare Materialien berücksichtigt LEFIK [55] in einer numerischen Homogenisierung, die das GSCS verallgemeinert.

5.2.6 Vergleich der Verfahren

Abbildung 5.10 zeigt die Steifigkeiten der vorgestellten Homogenisierungsverfahren. Aufgetragen ist das Verhältnis der effektiven Steifigkeitsmodule bezogen auf die Steifigkeit der Matrix über den gesamten Bereich von $c_{\rm I}$. Berechnet wird eine weiche Matrix in die eine 20-fach steifere Kugel eingebettet ist. Die Materialien sind beispielhaft mit $E_{\rm I} = 300 N/mm^2$, $\nu_{\rm I} = 0.2$, $E_{\rm M} = 15 N/mm^2$ und $\nu_{\rm M} = 0.4$ gewählt.

Sowohl in Abbildung 5.10a, als auch in Abbildung 5.10b, ist gut zu erkennen wie die VOIGT- und REUSS-Grenzen die effektiven Steifigkeiten begrenzen. Die Grenzwerte nach HASHIN-SHTRIKMAN grenzen den Bereich weiter ein. Für den effektiven Kompressionsmodul ist zu beachten, dass die Lösung der unteren Grenze nach HASHIN-SHTRIKMAN, des MORI-TANAKA-Verfahrens und des GSCS gleich sind, trotz ihrer unterschiedlichen Herleitungen. In beiden Abbildungen ist zu erkennen wie das lineare Verhalten der dünnen Defektverteilung nur für Werte $c_{\rm I} \rightarrow 0$ gültig ist und für den Kompressionsmodul bereits ab etwa $c_{\rm I} = 0,10$ außerhalb der REUSS-Grenze ist.

Abbildung 5.10b zeigt wie die effektive Schubsteifigkeit des GSCS mit zunehmenden $c_{\rm I}$ von der des MORI-TANAKA-Verfahrens abweicht. Die zusätzliche Steifigkeit resultiert aus der Interaktion zwischen den Einschlüssen, die das MORI-TANAKA-Verfahren durch die Annahme der gemittelten Matrixfelder nur bis etwa $c_{\rm I} = 0,3$ hinreichend genau berücksichtigt. So entspricht die Lösung der unteren Grenze nach HASHIN-SHTRIKMAN. Bei Vertauschen der Matrix- und Einschlüssphase entspricht die Lösung des MORI-TANAKA-Verfahrens der oberen Grenze nach HASHIN-SHTRIKMAN und kann so theoretisch auch für Einschlussvolumina $c_{\rm I} \rightarrow 1$ verwendet werden.





Abbildung 5.10: Vergleich der Homogenisierungsverfahren

5.3 Erweiterung auf inelastische Verformungen

Den bisherigen Ausführungen liegt linear-elastisches Werkstoffverhalten zu Grunde. Für die Modellbildung realer Werkstoffe ist dies nur für sehr kleine Verformungen oder Belastungszeiten ausreichend. Viele Materialien verhalten sich bei entsprechend langer oder großer Belastung viskos oder elasto-plastisch. Damit einher geht ein nichtlineares Spannungs-Dehnungsverhalten, welches die grundlegenden Annahmen der analytischen Homogenisierungsmethoden verletzt. Ziel der Erweiterungen um inelastisches Materialverhalten ist es, durch geeignete Verfahren einen linearen Zusammenhang herzustellen.

5.3.1 Linearisierungsmethoden

Viele Verfahren basieren auf einer LAPLACE-Transformation. Die Lösung wird dann im LAPLACE-Raum ermittelt und durch eine Rücktransformation in den Zeitbereich überführt. Für komplexe Gleichungen ist die Rücktransformation nicht mehr trivial und muss numersich erfolgen, zum Beispiel mit dem Algorithmus nach GAVER-STEHFEST [98] oder der Methode nach LÉVESQUE [61]. Die numerische Rücktransformation ist ein bedeutender Faktor für die Berechnungszeit.

Eine Übersicht verschiedener Methoden ist in REKIK [85] erläutert. Beispielhaft wird ein nichtlinear-elastisches Material modelliert. Zu den genannten Verfahren sind Erweiterungen in [84] vorgeschlagen. Darunter die von MASSON [64] für elastoplastisches Werkstoffverhalten entwickelte affine Formulierung. Für das nichtlineare heterogene Material wird dabei ein dem Materialverhalten affines linear-thermoelastisches Vergleichsmaterial eingeführt. BRENNER [12] erweitert die affine Formulierung und PIERARD [78] überträgt sie auf elastisch-viskoplastisches Werkstoffverhalten. Für elastoplastisches Material beschreibt DOGHRI [25] eine alternative Formulierung der affinen Formulierung. Eine Beschreibung der affinen Formulierung direkt im Zeitbereich gibt MILED [65] an.

Eine weitere neue Methode ist die auf dem Variationsprinzip nach PONTE-CASTAÑEDA [15] basierende, allgemeine Formulierung für elastisch-plastisches, elastisch-viskoelastisches und elastisch-viskoplastisches Werkstoffverhalten von LAHELLEC [52, 53, 54], die ebenfalls direkt im Zeitbereich anwendbar sind.

Für linear-viskoelastisches Materialverhalten ist das elastisch-viskoelastische Korrespondenzprinzip nach SCHAPERY [56, 69, 88] etabliert. Die Kriechfunktion

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \tag{5.56}$$

beschreibt die zeitliche Veränderung der im Versuch beobachteten einaxialen Dehnungen $\varepsilon(t)$ bei konstanter Spannung σ_0 . Mit dem BOLTZMANN'schen Gedächtnisintegral wird Gleichung (5.56) auf die Form

$$\varepsilon(t) = \int_{0}^{t} J(t-\tau) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau$$
(5.57)

erweitert und kann so nichtkonstante Belastungsverläufe ausdrücken. τ bezeichnet den Zeitpunkt spontaner Belastung. In dieser Form sind die vorgestellten Homogenisierungsmethoden jedoch nicht anwendbar. Ein äquivalenter linear-elastischer Ansatz wird durch die Transformation in den LAPLACE-CARSON-Raum erreicht. Aus der Integralschreibweise folgt eine einfache algebraische Gleichung. Die LAPLACE-CARSON-Transformation ist mit

$$\tilde{J}(s) = s \cdot \mathcal{L}\left[J(t)\right] = s \int_{0}^{\infty} J(t)e^{-st}dt$$
(5.58)

mit der komplexen Variable s im LAPLACE-CARSON-Raum definiert. Daraus folgt

$$\tilde{\varepsilon}(s) = \tilde{J}(s)\tilde{\sigma}(s), \qquad (5.59)$$

was der Form der HOOKE'schen Werkstoffgleichung entspricht. Dieser Zusammenhang ist die Grundlage des elastisch-viskoelastischen Korrespondenzprinzips. Die Form von Gleichung (5.59) erlaubt formal wieder die Anwendung der Homogenisierungsverfahren. Dem Werkstoffmodell entsprechend ersetzt die Größe $\tilde{J}(s)$ dabei die Größen K und μ . Die Funktion $\tilde{J}(s)$ wird für jeden Punkt s homogenisiert. Das Ergebnis ist die effektive Kriechfunktion $\tilde{J}_{eff}(s)$. Diese wird nun durch die zuvor genannten numerischen Methoden in den Zeitbereich zurück transformiert. Dies geschieht Punktweise und nicht in integraler Form, so dass die Funktion $\tilde{J}_{eff}(s)$ punktuell in $J_{eff,j}(t)$ überführt wird. Für die Relaxationsfunktion gelten die entsprechenden Zusammenhänge in gleicher Form.

5.3.2 Anwendung für das fraktionale Element

KOCZYK [49] erläutert die Überführung der Kriechfunktion in eine differentielle Formulierung. Die ist allgemeiner und auch um nichtlineare Anteile erweiterbar. Für die Anwendung in der Homogenisierung ist die fraktionale Differentialgleichung des Maxwell-Körpers in eine algebraische Form zu überführen. Dies geschieht in natürlicher Form mit der Schreibweise nach GRÜNWALD-LETNIKOV. Die Gleichung des zunächst linearen fraktionalen Maxwell-Modells

$$\varepsilon_j = \frac{1}{E_{\rm el}} \sigma_j + \Delta t^{\alpha} E_{\rm vp}^{(\alpha-1)} \eta^{-\alpha} \sigma_j + D_{\rm r,j}^{\alpha}$$
(5.60)

kann somit ebenfalls homogenisiert werden. Der elastische und fraktionale Anteil werden separat betrachtet. In der linearen Form sind die effektiven Steifigkeiten einmal zu ermitteln, da keine Abhängigkeiten von der Spannung vorhanden



Abbildung 5.11: Dehnungsanteile des fraktionalen Dämpfers

sind. Die Formulierung des fraktionalen Dämpfers entspricht einem elastischen Berechnungsschritt, der durch den Anteil des Rests $D_{\rm r}^{\alpha}$ korrigiert wird, siehe Abbildung 5.11. Dem Werkstoffmodell nach Abschnitt 4.3 folgend ist $C_{\rm bit}$ dem Schubmodul μ mit der Querdehnzahl $\nu = 0,5$ gleichzusetzen. Die Anwendung des GSCS bestimmt somit $C_{\rm eff}$. Der Restterm $D_{\rm r,eff}^{\alpha}$ generiert sich aus der Berechnung des effektiven Materials und muss nicht im einzelnen homogenisiert werden.

Diese Art der Homogenisierung ist dem Korrespondenzprinzip äquivalent, wie die direkte Gegenüberstellung zeigt. Abbildung 5.12 vergleicht die differentielle Form des bekannten linearen Dämpfers mit der Kriechfunktion. Dies entspricht dem fraktionalen Dämpfer mit $\alpha = 1,0$. Die Kriechfunktion ist in den untersuchten Fällen an die Lösung der Differentialgleichung für $c_{\rm I} = 0$ angepasst. Tabelle 5.1 zeigt die zugehörigen Funktionen. In der homogenisierten Form mit $c_{\rm I} = 0,5$ sind kleine Abweichungen zu erkennen. Diese sind auf die numerische Rücktransformation aus dem LAPLACE-CARSON-Raum zurückzuführen. Für den linearen Dämpfer wird die Gleichwertigkeit der Lösungen festgestellt.

Differentialgleichung	${ m Kriechfunktion}$	Laplace-Carson-Form		
$\dot{arepsilon} = rac{1}{\eta}\sigma$	$\varepsilon(t) = \frac{t}{\eta}\sigma$	$\tilde{\varepsilon}(s) = \frac{1}{\eta s} \sigma(s)$		
$D^{\alpha}\varepsilon = E_{\rm vp}^{(\alpha-1)}\eta^{-\alpha}\sigma$	$\varepsilon(t) = J_{\alpha} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha} \sigma(t)$	$\tilde{\varepsilon}(s) = J_{\alpha} \left(\frac{1}{s\tau}\right)^{\alpha} \Gamma\left[\alpha+1\right] \sigma(s)$		

Tabelle 5.1: Differentielle Form und Kriechfunktion rheologischer Elemente



Abbildung 5.12: Vergleich effektiver Dehnungen

Abbildung 5.12b zeigt, das die Homogenisierung für $0 < \alpha < 1$ qualitativ wie quantitativ mit der anerkannten Form der Laplace-Carson-Lösung gleichwertig ist. Die Bedingung, dass unabhängig von α ein quasi elastischer Berechnungsschritt gegeben ist, lässt sich anhand der Einheiten veranschaulichen,

$$\left[\frac{N}{mm^2}\right]^{-1} = [s]^{\alpha} \left[\frac{N}{mm^2}\right]^{\alpha} \left[\frac{mm^2}{N}\right] \left[\frac{mm^2}{Ns}\right]^{\alpha} .$$
(5.61)

Eine Homogenisierung direkt im Zeitbereich ist somit zulässig. Die differentielle Form ermöglicht die Berechnung beliebiger Belastungssituationen. Das direkte Lösen im Zeitbereich reduziert den numerischen Aufwand, wenn die rechenintensiven LAPLACE-Operationen entfallen.

Für die Anwendung auf das nichtlineare, fraktionale Dämpfermodell muss das Verfahren angepasst werden. Zunächst ist die Homogenisierung in jedem Zeitschritt neu durchzuführen, da die Steifigkeit von der Spannung abhängt und damit veränderlich ist. Die Spannung in den einzelnen Phasen kann mit den analytischen Methoden nicht einfach bestimmt werden. In [39] sind Näherungen beschrieben, in denen die Feldgrößen als phasenweise konstant angenommen und durch ihre Mittelwerte $\langle \sigma \rangle$ und $\langle \varepsilon \rangle$ angenährt werden. Davon abweichend wird an dieser Stelle die einfache Annahme getroffen, nach der die Spannungen $\sigma_{I,M}$ gleich der Makrospannung σ_{eff} sind. Dies entspricht dem REUSS-Modell. Mit der vorgestellten Methodik wird im Folgenden untersucht, wie gut die Vorhersage der Spannungen und Dehnungen des Verbundmodells für ungeschädigten Asphalt ist.

6 Asphalt

Neben den Versuchen an reinen Bitumen liegen auch Versuchsdaten von SMA 11 und AC 11 vor. Die im vorigen Kapitel vorgestellte Methodik wird nun für die Werkstoffmodelle aus Kapitel 3 und Kapitel 4 angewendet. Neben der Mastix und den mineralischen Einschlüssen ist zusätzlich der Luftporenanteil berücksichtigt. Anhand des Vergleichs der Simulationen mit den Versuchen wird die Aussagekraft des gesamten Verfahrens beurteilt und Grenzen diskutiert.

6.1 Bestimmung der Volumenanteile

In [31] sind der Bindemittelgehalt $m_{\rm M}$ der Matrix sowie der Mineralstoffgehalt $m_{\rm I}$ der Einschlüsse in Masseprozent angegeben. Für die Homogenisierung ist es notwendig die Komponenten entsprechend ihren Volumenanteilen zu berücksichtigen. Der Luftporengehalt ist nach [31] bereits in Volumenprozent c_P angegeben. Da das hier untersuchte Bitumen den Fülleranteil enthält, der sonst dem Mineralstoff angerechnet wird, muss dieser Anteil dem Mineralstoff abgezogen werden. Der Mineralstoff wird nach [31] in Masseprozent ausgedrückt und ist somit in Volumenprozent zu überführen. Mit der Bitumenmasse $M_{\rm M}$ und der Mineralstoffmasse $M_{\rm I}$ bestimmt sich der Volumenanteil des Bitumens $c_{\rm M}$ mit

$$m_{\rm I} = \frac{M_{\rm M}}{M_{\rm I} + M_{\rm M}} = \frac{\rho_{\rm M} V_{\rm M}}{\rho_{\rm M} V_{\rm M} + \rho_{\rm I} V_{\rm I}} = \frac{1}{1 + \frac{\rho_{\rm I}}{\rho_{\rm M}} \frac{V_{\rm I}}{V_{\rm M}}}$$
(6.1)

$$\frac{V_{\rm M}}{V_{\rm I}} = \frac{c_{\rm M}}{c_{\rm I}} = m_{\rm M} \frac{\rho_{\rm I}}{\rho_{\rm M}} \frac{1}{1 - m_{\rm I}} \,. \tag{6.2}$$

 $V_{\rm M}$ und $V_{\rm I}$ beschreiben das in der Mischung vorliegende Volumen. Die Dichte des verwendeten Bitumens 50/70 ist $\rho_{\rm M} = 1.03 \, g/cm^3$, die des Gabbros nach Tabelle 3.1 $\rho_{\rm I} = 2.65 \, g/cm^3$. Für den Füller wird die gleiche Dichte $\rho_{\rm F}$ wie für den Gabbro angesetzt. Unter der Einhaltung der Sättigungsbedingung

$$\sum_{i=\mathrm{M},\mathrm{I},\mathrm{P}} c_i = 1 \tag{6.3}$$

bestimmen sich die Volumengehalte von Bitumen und Mineralstoff zu

$$c_{\rm I} = \frac{1 - c_{\rm P}}{\frac{m_{\rm M}}{1 - m_{\rm M}} \frac{\rho_{\rm I}}{\rho_{\rm M}} + 1} \tag{6.4}$$

$$c_{\rm M} = 1 - c_{\rm I} - c_{\rm P} \,. \tag{6.5}$$

Da der Füller auf einer Größenskala unter dem Mineralstoffanteil anzusetzen ist, wird dieser üblicherweise in einem eigenen Homogenisierungsschritt mit dem Bindemittel vermischt, siehe [5]. Da in diesem Fall der Füller bereits mit dem Bitumen verarbeitet und in den Mastixparametern berücksichtigt ist, muss der Fülleranteil dem Bitumenanteil zugeordnet werden. Dafür wird der ebenfalls in Masseprozent angegebene Anteil mit

$$m_{\rm F} = \frac{M_{\rm F}}{M_{\rm I}} = \frac{\rho_{\rm F} V_{\rm F}}{\rho_{\rm I} V_{\rm I}} \longleftrightarrow c_{\rm F} = m_{\rm F} c_{\rm I} \tag{6.6}$$

in einen Volumenanteil umgerechnet. Damit folgen die für das Modell notwendigen Anteile zu

$$\tilde{c}_{\rm I} = c_{\rm I} - c_{\rm F} \,, \tag{6.7}$$

$$\tilde{c}_{\rm M} = c_{\rm M} + c_{\rm F} \,. \tag{6.8}$$

Die so bestimmten Volumenanteile $c_{\rm I}$ sind für den SMA 11 und AC 11 in Tabelle 6.1 zusammengefasst.

			1
Asphalt	$\tilde{c}_{\mathrm{M}}\left[- ight]$	$\tilde{c}_{\mathrm{I}}\left[- ight]$	$c_{\mathrm{P}}\left[- ight]$
AC 11	0,7535	0,2025	0,044
SMA 11	0,7453	0,2307	0,024

Tabelle 6.1: Volumenanteile Asphalt

6.2 Homogenisierung Mastix - Korn - Luft



Abbildung 6.1: Zweistufiger Homogenisierungsprozess

Für die Mischung wird die in Abbildung 6.1 dargestellte zweistufige Homogenisierung verwendet. Zunächst wird die Mastix mit dem Mineralstoff homogenisiert. In einem zweiten Schritt wird diesem neuen effektiven Matrixmaterial der Luftporenanteil hinzugefügt. Das effektive Einschlussvolumen in den zwei Schritten bestimmt sich mit

$$c_{\mathrm{I},1} = \frac{\tilde{c}_{\mathrm{M}}}{\tilde{c}_{\mathrm{M}} + \tilde{c}_{\mathrm{I}}}, \qquad (6.9)$$

$$c_{\rm I,2} = \frac{c_{\rm P}}{\tilde{c}_{\rm M} + \tilde{c}_{\rm I} + c_{\rm P}} \,.$$
 (6.10)

Die Homogenisierung verläuft getrennt für die Feder und den fraktionalen Dämpfer. Für die linear-elastischen Anteile der Feder werden die nach Gleichung (3.4) und Gleichung (3.5) umgerechneten Kompressions- und Schubmodule der Mastix und der mineralischen Einschlüsse homogenisiert. Der fraktionale Dämpfer beschreibt die rein deviatorischen, viskosen Verformungen und ist für die Homogenisierung dem Schubmodul gleichzusetzen. Für die Anwendung des GSCS ist die Querdehnzahl der Matrix zu $\nu_{\rm M}^{\rm vp} \approx 0,5$ festgelegt. Daraus folgt $K_{\rm M} \to \infty$. Während sich die viskosen Verformungen mit der Grünwaldreihe über die Zeit summieren, treten in den Einschlüssen keine zusätzlichen viskosen Verformungsanteile auf. Die Einschlüsse sind für die Homogenisierung des Dämpfers deshalb als Starrkörper mit $\mu_{\rm I} \to \infty$ und $K_{\rm I} \to \infty$ angesetzt.

6.3 Experimentelle Untersuchung von Asphalt

Für die Asphalte AC 11 und SMA 11 liegen Versuchsdaten aus weggesteuerten Zug- und kraftgesteuerten Kriechversuchen vor. Die Lastniveaus unterscheiden sich von denen, die während der Prüfung der Mastix verwendet werden, siehe Tabelle 6.2. Die Belastungen beim AC 11 und SMA 11 entsprechen einander nicht in allen Fällen. Wie auch schon bei der Mastix sind die Spannungs-Dehnungsverläufe in Bereichen mit auftretender Schädigung nicht berücksichtigt. Dies bezieht sich hauptsächlich auf den AC 11, der bereits ab $\theta = -10$ °C sprödes Verhalten zeigt. Bei hohen Temperaturen wird ein Austreten des Bitumens beobachtet, wovon vor allem der SMA 11 betroffen ist. Die damit einhergehende Verdichtung und der lokal erhöhte Volumenanteil $\tilde{c}_{\rm I}$ werden nicht berücksichtigt, da nicht bekannt ist, wieviel Bitumen austritt. Die Versuche sind an prismatischen Probekörpern durchgeführt. Die Abmessungen entsprechen denen der Bitumenprobekörper, siehe auch Abbildung 4.12a.

Den Sieblinien in Abbildung 3.3 und Abbildung 3.4 ist zu entnehmen, dass Kornfraktionen bis Durchmesser d = 16 mm enthalten sind. Die für ein RVE notwendige Bedingung aus Gleichung (5.1) ist bei Probekörperabmessungen mit Seitenlängen l = 40 mm verletzt. Eine statistische Homogenität der Probekörper ist damit nicht mehr gegeben. Es wird davon ausgegangen, dass die einzelnen Mikrostrukturen Einfluss auf die Experimente nehmen. Sowohl die Versuchsergebnisse als auch der Vergleich werden deshalb hauptsächlich qualitativ bewertet.

Werkstoff	Versuchsart	$\theta [^{\circ}C]$	Dehnrate $\dot{\varepsilon} \left[1/s \right]$		
AC 11	Zugversuche	10; 20; 30	$5.2 \cdot 10^{-5} \cdot 1.04 \cdot 10^{-4} \cdot 5.2 \cdot 10^{-4}$		
SMA 11			5,2.10, 1,04.10, 5,2.10		

Tabelle 6.2: Lastniveaus der Asphaltversuche (a) Belastung weggeregelte Versuche

(b) Belastung kraftgeregelte Versuche

Werkstoff	Versuchsart θ [°C]		Spannung $\sigma \left[N/mm^2 \right]$		
AC 11	Kriechversuche	-20; -10; 0	0,09; 0,13; 0,17; 0,5; 0,7		
SMA 11			0,09; 0,13; 0,5; 0,6; 0,7;		
			$0,8;\ 0,9;\ 1,0$		

Weggesteuerte Zugversuche AC 11

Abbildung 6.2 zeigt die Zugversuche des AC 11. Temperatur- und Belastungsübergreifend ist das bereits von der Mastix bekannte Spannungs-Dehnungs-Verhalten gut zu erkennen. Dies bestätigt die Annahme, dass das Bitumen das inelastische Werkstoffverhalten von Asphalt dominiert. Weiterhin ist zu erkennen, dass die Spannungen etwa in der Größenordnung 10² höher sind als in der Mastix bei gleicher Temperatur. Dabei ist die vorgegebene Dehnrate bis zu 10⁻² langsamer. Qualitativ bestimmt das Bitumen das Werkstoffverhalten, während quantitativ die Einschlüsse einen erheblichen Einfluss auf die auftretenden Spannungen haben. Die Zugversuche in Abbildung 6.2a und Abbildung 6.2b sind früh durch Schädigung beeinflusst. Die angestrebte Enddehnung von $\varepsilon = 10^{-2}$ wird in keinem der Versuche erreicht. Die Laststeuerung wird in der Simulation direkt nachgefahren, da der Versuchsaufbau die geforderten konstanten Dehnraten nicht umsetzen kann. In der Simulation treten dadurch kleine Schwankungen in den Verläufen auf, da die dem Maxwell-Modell vorgeschaltete Einzelfeder ungedämpft darauf reagiert.

Die im Versuch auftretenden Kräfte werden mit Kraftmessdosen gemessen. Die Versuchsspannung wird durch Teilen der Kraft durch die Querschnittsfläche des Probekörpers ermittelt. Während dies bei der Mastix noch ein nahezu homogener Körper aus Bitumen ist, kann diese Behauptung für die Asphaltproben nicht mehr unterstützt werden. Die Spannungsverteilung in der Probe bleibt unbekannt und es sind die über die Fläche gemittelten Spannungen aufgetragen. Dies entspricht der Annahme im Werkstoffmodell für die gemittelten Spannungen des homogenen Ersatzmediums. In Abbildung 6.2a gibt die Simulation die Spannungen gut wieder. Mit zunehmender Temperatur sind die Spannungen weniger gut angenähert. Abbildung 6.2b und Abbildung 6.2c zeigen, das zeitgleich die Streuung der Versuche zunimmt. Teilweise streuen die Ergebnisse des einen Lastfalls in die des nächsthöheren ein. Es tritt keine ausreichende Verfestigung im Werkstoffmodell ein. Dies deutet darauf hin, dass nicht nur die natürlichen Verfestigungsprozesse des Bitumens aktiviert werden. Trotz der Verdichtung während der Herstellung der Probekörper kann eine Nachverdichtung durch die Belastung bzw. in den Zugversuchen durch die Querkontraktion Einfluss auf das Spannungs-Dehnungs-Verhalten nehmen. Das während der Versuchsdauer Bitumen ausgetreten ist, das sogenannte *bleeding*, unterstützt diese Annahme.

Die erreichten Enddehnungen nehmen mit steigender Temperatur zu. Das Bitumen ist nachgiebiger und die auftretenden Spannungen nehmen trotz größerer Dehnungen bei zunehmnder Temperatur ab. Das Phänomen ist bereits bei den Mastixversuchen zu beobachten und die Kornverteilung nimmt darauf keinen Einfluss. Dabei entwickeln sich die Spannungen über alle Temperaturbereiche qualitativ ähnlich und streben jeweils gegen eine Sättigungsspannung.



Abbildung 6.2: Zugversuche AC 11

Weggesteuerte Zugversuche SMA 11

In Abbildung 6.3 sind die Ergebnisse der Zugversuche des SMA 11 dargestellt. Die Versuche sind bei den gleichen Temperatur- und Lastniveaus durchgeführt wie die des AC 11. Wie bei den Versuchen am AC 11 zeigt auch der SMA 11, dass die angestrebte Enddehnung nicht immer erreicht wird. Dies ist insbesondere bei den niedrigen Temperaturen zu beobachten. Die konstante Versuchsdehnrate wird ebenfalls nur in wenigen Versuchen erreicht. Deshalb wird auch für den SMA 11 in der numerischen Simulation der genaue Belastungspfad aufgebracht. Das erklärt die teilweise großen Ausschläge in den Spannungen, da auch hier die im Modell vorgeschaltete Feder ungedämpft auf die spontane Wegänderung des Versuchsaufbaus reagiert.

Für $\theta = 10$ °C, dargestellt in Abbildung 6.3a, wird die Steifigkeit im Modell leicht überschätzt. Die Abweichung nimmt dabei mit steigendem Lastniveau zu. Für die Dehnrate $\dot{\varepsilon} = 5, 2 \cdot 10^{-4} 1/s$ zeigt die numerische Simulation auch zum Ende des Versuchs noch einen Anstieg der Spannungen. Hier ist die Enddehnrate noch nicht erreicht und über die Dauer des Versuchs steigt die Dehnrate kontinuierlich an. Mit dem erarbeiteten Werkstoffmodell bedeutet das, dass keine Sättigungsspannung erreicht ist, solange die Dehnrate veränderlich ist. Für die weiteren Versuche wird eine konstante Enddehnrate erreicht.

Die numerische Simulation stimmt in Abbildung 6.3b sehr gut mit den experimentellen Ergebnissen überein. Die Versteifung des Probekörpers durch das Korngerüst ist gut beschrieben. Die Abweichungen für $\dot{\varepsilon} = 1,04 \cdot 10^4 \, 1/s$ sind im Bereich der Versuchsgenauigkeit. Im numerischen Modell relaxiert der Asphalt hier schneller als im Versuch beobachtet. Damit erreicht das Modell früher die Sättigungsspannung und kann nicht mehr das Spannungsniveau des Versuchs erreichen. In der Versuchskurve für $\dot{\varepsilon} = 5,2 \cdot 10^{-4} \, 1/s$ ist zu Beginn des Versuchs ein leichtes einbrechen der Spannungen zu beobachten. Die hohe elastische Steifigkeit in der numersichen Simulation, erzeugt durch das Korngerüst des SMA 11, führt in der Berechnung zunächst zu einer deutliche Abweichung in den Ergebnissen, bevor die Relaxationsprozesse einsetzen und die Kurven sich wieder angleichen.

Abbildung 6.3c zeigt, dass das Modell die Steifigkeit bei hohen Temperaturen unterschätzt. Der aussteifende Effekt des Korngerüsts wird nicht mehr ausreichend abgebildet. Und die Sättigungsspannung ist bereits zu Beginn der Versuchsdauer nach kurzer Zeit erreicht. Aus den Zugversuchen des SMA 11 wie auch des AC 11 zeigt sich, dass noch weitere Einflüsse auf die Steifigkeit berücksichtigt werden müssen. Da im Modell nur das Bitumen temperaturabhängig formuliert ist und dies für das reine Bitumen sehr gut übereinstimmt sind die zusätzlichen Einflüsse auf die Steifigkeit mit noch nicht berücksichtigten Phänomenen aus der Interaktion zwischen Korn und Bitumen zu erklären.



Abbildung 6.3: Zugversuche SMA11

Kriechversuche AC 11

Mit den Kriechversuchen wird das Langzeitverhalten des AC11 und SMA11 untersucht. Die Belastungsphase beträgt 7.200 $s=2\,h$ für alle Versuche. Eine Wiederbelastung findet nicht statt. Wie bereits bei den Zugversuchen, weichen die Lastniveaus von denen der Mastix ab. Für die Kriechversuche sind deutlich größere Kräfte aufgebracht um eine messbare Reaktion der Asphaltprobekörper zu erzielen. In der Entlastung ist ein Einfluss der Prüfmaschine nicht auszuschließen. So zeigt Abbildung 6.5c bei $\sigma=0,13\,N/mm^2$ nach der Entlastung ein erneutes Anwachsen der Dehnungen.

Abbildung 6.4a zeigt eine gute Übereinstimmung der inelastischen Dehnungen für $\sigma=0,5\,N/mm^2$. Allerdings zeigt der Versuch nahezu elastisch-plastisches Materialverhalten ohne viskose Anteile. Das Verhalten für $\sigma=0,7\,N/mm^2$ entspricht qualitativ dem Verhalten wie es für das Bitumen beobachtet werden kann. Aufgrund der geringen Temperatur ist der Anteil der viskoelastischen Dehnungen an den Gesamtdehnungen klein.

Die Bedeutung der viskosen Dehnungen nimmt ab $\theta=-10~^{\circ}\mathrm{C}$ zu, dargestellt in Abbildung 6.5b. Die elastischen Dehnungsanteile sind noch deutlich während der Be- und Entlastung zu erkennen. Es beginnen jedoch die viskosen Verformungen zu bei kleinen Lastniveaus zu dominieren. Die Kriechprozesse sind auch nach der Entlastung gut erfasst. Die Versuche am AC 11 werden hier insgesamt sehr gut durch das numerische Modell beschrieben.

Die Verfestigung des AC 11 wird dagegen in Abbildung 6.4c stark unterschätzt. Im Vergleich zu den Mastixversuchen ist die Prozesszone der Verfestigung kürzer. Das weist darauf hin, dass nicht nur das Bitumen an der Verfestigung beteiligt ist, sondern auch das Korngerüst. Mindestens beeinflusst das Korngerüst aber das Bitumen maßgebend. Mit der unterschätzten Verfestigung geht modellbedingt die zu große viskoelastische Entlastung einher. Der Einfluss der elastischen Verformungen hat weiter abgenommen und kann nahezu vernachlässigt werden. Die bleibenden Dehnungen im entlasteten Zustand werden schneller erreicht als ein stationärer Dehnungszustand während der Belastungsphase. Das Phänomen ist bereits bei den Mastixversuchen zu beobachten und deutet auf eine interne Schädigung oder Neustrukturierung der Bitumenbestandteile hin, welche keine vollständige Erholung ermöglichen. Da mit den durchgeführten Versuchen eine genaue Unterteilung der mikroskopischen Phänomene im Bitumen und Korngerüst nur indirekt möglich sind, kann der Einfluss des Korns jedoch nicht ausgeschlossen werden.

Die Beobachtungen zeigen, dass das entwickelte Werkstoffmodell die Kriechversuche für AC 11 nicht im gesamten Temperaturbereich wiedergeben kann. Die qualitative Abstufung der Spannungsnichtlinearität wird hingegen bereits gut erfasst.



(c) Kriechversuche AC 11, $\theta = 0$ °C

Abbildung 6.4: Kriechversuche AC 11

Kriechversuche SMA 11

Abbildung 6.5 bestätigt, dass der SMA 11 nachgiebiger ist. Für $\theta = -20$ °C sind die elastischen Dehnungen unterschätzt. Abbildung 6.5a zeigt, dass die Endkriechraten gut wiedergegeben werden. Die Verfestigungsprozesse in der primären Kriechphase wird von der numerischen Simulation jedoch stark überschätzt, so dass ein nahezu elastisch-plastisches Dehnungsverhalten zu beobachten ist. Über alle Temperatur- und Lastniveaus wird in den Asphaltversuchen eine große Streuung des E-Moduls der Asphaltproben festgestellt. Für die Untersuchung des E-Moduls und der Einflüsse der Kornverteilung auf diesen sind weitere Untersuchungen zu empfehlen.

Abbildung 6.5b zeigt, dass das Endkriechmaß der Belastungsphase gut übereinstimmt. Ein Versatz der Kurven entsteht erneut aus einer zu schnell verfestigenden primären Kriechphase. Die elastischen Dehnungen sind sowohl in der Bewie auch der Entlastung gut erfasst. Die Ergebnisse sind teilweise von der Größenordnung der Streuung der durchgeführten Versuche. Für eine abschließende Bewertung ist die Anzahl der verfügbaren Datensätze nicht ausreichend.

Die Ergebnisse in Abbildung 6.5c zeigen, dass die primäre Kriechphase bei höheren Temperaturen gut abgebildet wird. Das Endkriechmaß weicht hingegen ab und ist insgesamt zu hoch. Die Abweichung ist jedoch deutlich geringer als für den AC 11. Der Unterschied ist auf die Sieblinien zurück zu führen. Die interne Struktur ist unter Zugbeanspruchung nicht so Widerstandsfähig wie die dicht gepackte Struktur des AC 11. Nach der Entlastung ist eine Veränderung im Dehungsverhalten zu beobachten. Während bei den geringeren Temperaturen ein viskoelastisches Verformungsverhalten zu beobachten ist, zeigen sowohl der AC 11 wie auch der SMA 11 nur eine kurze viskoelastische Prozesszone, welche in konstante viskoplastische Dehnungen übergeht. Im Fall des SMA 11 für $\sigma = 0,13 \ N/mm^2$ nehmen die bleibenden Dehnungen im Versuch sogar wieder zu. Dies ist nur durch einen Einfluss des Versuchsstandes zu erklären. Damit ist eine Beeinflussung der weiteren Versuche nach Entlastung bei $\theta = 30 \,^{\circ}$ C nicht auszuschließen.

Das Verbundmodell ist in dieser Form in der Lage, das qualitative Werkstoffverhalten von verschiedenen Asphalten zu prognostizieren, die quantitative Vorhersage ist jedoch starken Schwankungen unterworfen. Dies erfordert eine kritische Diskussion der bisherigen Methodik und Identifikation möglicher Ursachen. Dazu gehören die Versuchsergebnisse aus denen die Modellparameter bestimmt sind sowie die zum Vergleich des Asphalts verwendeten Versuchsdaten. Außerdem werden die im Modell erfassten und bisher nicht erfassten Phänomene kritisch diskutiert.



(a) Kriechversuche SMA 11, $\theta = -20$ °C







(c) Kriechversuche SMA 11, $\theta=0\,^{\circ}\mathrm{C}$

Abbildung 6.5: Kriechversuche SMA 11

6.4 Diskussion und Erweiterung des Modells

Zunächst werden die Versuche und die daraus resultierende Parameterbestimmung genauer betrachtet. Es werden Grenzen aufgezeigt und Verbesserungen vorgeschlagen. Im Anschluss folgt die kritische Auseinandersetzung der beobachteten Phänomene in Versuch und Simulation sowie das Aufzeigen von Möglichkeiten zur Erweiterung des erarbeiteten Werkstoffmodells.

6.4.1 Versuchsprogramm

Im Straßenwesen werden üblicherweise dynamische Versuche angewendet. Die bilden das Überfahrverhalten des laufenden Verkehrs ab. Mit den Druck-, Zugund Kriechversuchen sind kontinuumsmechanische Versuche erfolgt, wie sie von Werkstoffen wie Stahl bekannt und für Asphaltwerkstoffe unüblich sind. Das Langzeitverhalten unter einer ortsfesten Last, zum Beispiel auf Parkplätzen oder Ampelsituationen, lässt sich damit gut untersuchen. Ein wesentliches Problem der Asphaltversuchsreihen besteht in den Probekörperabmessungen. Mit Größtkörnern, die bis zu 40 % des Querschnitts ausmachen, sind keine repräsentativen Aussagen möglich, die für die Homogenisierung der mikrostrukturellen Eigenschaften verwendet werden können. Der Probekörper ist nicht als ein statistisch äquivalentes Kontinuum anzusehen. Aus Gleichung (5.1) wird empfohlen die Probekörper mit den Seitenlängen $10 d_{\text{max}}$ herzustellen. Für die hier verwendeten Asphalte bedeutet dies Abmessungen von $160 \times 160 \, mm^2$. Dies setzt entsprechend große Prüfeinrichtungen voraus. Statt größerer Versuchseinrichtungen können auch Asphalte wie AB/SMA5 oder AB/SMA8 verwendet werden, was entsprechend kleinere Probekörper ermöglicht.

Für das Bitumen sind Versuche an reinem Bitumen zu ergänzen. So kann bereits der Einfluss des Füllers mit dem Modell überprüft werden. Wie ALAM [5] beschreibt, ist der Füller eine Größenskala unterhalb des restlichen Mineralstoffs und eine mehrstufige Homogenisierung zu empfehlen. In den in dieser Arbeit verwendeten Mischungen ist der Fülleranteil gleich. In realen Asphalten variiert der Fülleranteil, so dass eine Validierung des Modells in diesem Mischungsstadium untersucht werden muss. Alternativ müssen für jede Bitumen-Füller-Mischung eigene Versuche durchgeführt werden, was den Versuchsaufwand nicht verringert und auch der numerischen Simulation Anwendungsgrenzen setzt.

Während für die Mastix die weggesteuerten Versuche den Druck- und Zugbereich umfassen, fehlt der Druckbereich für die Asphalte. Durch den Einfluss des Korngerüsts ist dieser Bereich von besonderer Bedeutung. Den Versuchen ist zu entnehmen, dass das Zugverhalten vom Bitumen dominiert wird. Eine Aussage, ob dies im Druckbereich ebenfalls zutrifft, die Fließregel des Bitumens auch im Druckbereich weiterhin Gültigkeit besitzt, kann deshalb an dieser Stelle nicht getroffen werden.



Abbildung 6.6: Belastung Versuchsprogramm

Abbildung 6.6 zeigt, das die Mastix- und Asphaltversuche bei sehr unterschiedlichen Lastniveaus durchgeführt werden. Für das nichtlineare Modell wirkt sich dies negativ auf die Validierung des Asphalts aus. Die Evolutionsstrategie bestimmt die Modellparameter anhand der verfügbaren Daten. Im nichtlinearen Werkstoffmodell steigt die Unsicherheit der Vorhersage mit größer werdenden Abständen von den Bezugswerten an. Es wird deshalb empfohlen, die Lastniveaus sowohl der Mastixversuche wie auch der Asphaltversuche anzugleichen. Dabei sind die Lastniveaus auch mit der Messtechnik abzustimmen. Eine Reihe von Apshaltversuchen bei niedrigen Temperaturen und kleiner Last sind unbrauchbar, da die Wegaufnehmer die kleinen Verformungen nicht richtig erfassen können. Eine Berücksichtigung dieser Faktoren führt zu einer verbesserten Identifikation von Ursachen, da experimentelle Abweichungen in den Versuchen minimiert werden. Die Bandbreite an Lastfällen ist dabei möglichst groß zu wählen, so wie es in den vorhandenen Versuchen bereits der Fall ist.

6.4.2 Modellerweiterungen

Der Vergleich von Versuch und numerischer Simulation zeigt, dass das Werkstoffmodell die verschiedenen Asphaltmischungen nicht über den untersuchten Temperatur- und Lastbereich hinreichend genau wiedergeben kann. Während die Verfestigung bei niedrigen Temperaturen zu groß ist, ist sie bei hohen Temperaturen häufig zu klein. In der vorhandenen Formulierung wird mit dem GSCS eine konstante Matrixhülle um das Einzelkorn angenommen. Das Verhältnis von $c_{\rm I} = (a/b)^3$ nach Abbildung 5.7 ist dabei für jedes Korn gleich. In der Probe wird dieses Verhältnis nicht konstant für alle Körner eingehalten. Im Folgenden werden zwei mögliche Modellerweiterungen diskutiert. Der Schwerpunkt ist dabei auf Phänomene gesetzt, welche Einfluss auf die Kornhülle nehmen. Dabei sind sowohl mechanische wie auch physikalisch-chemische Prozesse betrachtet.

Deformationsabhängiges Einschlussvolumen c_I

Bei hohen Temperaturen zeigen sich während der Durchführung der Experimente bleeding-Effekte. Dabei wird Bitumen ausgepresst bzw. im Probekörper in die Porenräume gedrückt. Dies verändert das Verhältnis von c_{I} und führt zu einer zusätzlichen Versteifung. Da diese Effekte in den vorliegenden Versuchen nicht genauer betrachtet wurden, können an dieser Stelle nur allgemeine Aussagen getroffen werden. Die Menge des austretenden Bitumens ist gering. Die Betrachtung einer Asphaltmischung zeigt jedoch, dass die Einschlüsse bereits sehr dicht angeordnet sind. Kleine Veränderungen führend dann bereits dazu, dass das Bitumen ziwschen zwei Einschlüssen soweit verdängt wird, dass diese unter Druck eine direkte Kraftübertragung möglich machen, siehe [94]. Dabei kann in den angrenzenden Zwischenräumen Bitumen gebunden sein, welches dann am Lastabtrag kaum bzw. nicht mehr beteiligt ist. Anhand von Druckversuchen kann dieses Phänomen untersucht werden. Das Korngerüst wird dann sicher aktiviert und Unterschiede zwischen den Sieblinien, bei sonst gleichen Rahmenbedingungen, erkennbar. Vorher/Nachher-Bilder der internen Struktur können zusätzlich mit modernen Messmethoden wie der Computertomographie erstellt werden. Eine Formulierung von $c_{\rm I}$ kann im Anschluss an die Untersuchung in Abhängigkeit der Verformung aufgestellt werden.

Physikalisch-chemische Reaktion Bitumen/Korn

Das GSCS ist in Abhängigkeit des Einschlussvolumens formuliert. Dies ist für die untersuchten Asphalte nahezu identisch und erklärt die Ähnlichkeit der Ergebnisse. Eine verbesserte Formulierung die stärker auf die Unterschiede in der Sieblinie eingeht, ist daher anzustreben. PICHLER [77] homogenisiert die Einschlüsse Schrittweise und unterteilt die Sieblinie dafür in Füller-, Sand- und Kiesanteile, welche einzelnen Größenskalen zugeordnet sind. Dies erhöht den Einfluss des Sieblinienverlaufs, erfordert aber eine Validierung auf jeder Skala. Die nichtlineare Entwicklung der Steifigkeit bedingt außerdem, dass der Prozess nicht in beliebiger Reihenfolge wiederholbar ist.

Während des Herstellungsprozesses wird das Asphaltmischgut erhitzt und das Bitumen verflüssigt. Das Korn und das Bitumen gehen dabei eine adhäsive Bindung ein. Diese ist abhängig von den physikalisch-chemischen Eigenschaften des Korns [83, 63], Form, Oberflächenbeschaffenheit und der Oberflächenladung. Die Maltenephase wird dabei teilweise vom Korn adsorbiert. Dies hinterlässt einen Film aus Bitumen mit erhöhtem Asphaltengehalt im Nahbereich um das Korn. Dieser hat eine höhere Steifigkeit als das Bitumen, aber eine geringere als das Korn. Der Grad der Adsorbtion ist dabei durch zwei Eigenschaften begrenzt. Einerseits durch die Fähigkeit des Korns, die Maltenephase zu adsorbieren. Dies wird durch die Struktur und chemische Zusammensetzung des Korns bestimmt. Andererseits durch die in der Maltenephase vorhandenen Anteile die adsorbiert werden können. Dies ist bitumenabhängig. Bei niedrigen Einschlusskonzentrationen ist die erste Eigenschaft maßgebend, bei hohen Einschlusskonzentrationen die zweite.

Während das Einschlussvolumen c_1 des AC 11 und SMA 11 nahezu gleich ist, ist die spezifische Oberfläche aufgrund der Sieblinie sehr unterschiedlich. Vereinfachend wird die Oberfläche der Sieblinienanteile an Kugeln gleichen Durchmessers bestimmt. Für ein Bezugsvolumen von $V = 1 m^3$ ist die Oberfläche des AC 11 $A_{AB} = 7.017,6 m^2$ und die des SMA 11 zu $A_{SMA} = 5.883,8 m^2$. Da die Schichtdicke des steifen Bitumenfilms nicht bekannt ist, wird diese aus den vorliegenden Asphaltversuchen zurück berechnet. Dabei sind folgende, vereinfachende Annahmen getroffen,

- das adsorbierte Bitumen ist durch den hohen Asphaltengehalt ein Gel-Bitumen und damit linear-elastisch,
- durch die veränderte Maltenephase ändert sich auch die Temperaturabhängigkeit.

Die zweischrittige Homogenisierung wird um einen Schritt ergänzt. In diesem wird zunächst das Korn mit dem steifen Bitumenfilm homogenisiert, siehe Abbildung 6.7. Das adsorbierte Bitumenvolumen ist

$$V_{\rm M}^{ad} = Ad_M^{\rm ad} \tag{6.11}$$

und erfüllt die Bedingung

$$\tilde{V}_{\rm M} = V_{\rm M} - V_{\rm M}^{\rm ad} \,.$$
(6.12)

Die Schichtdicke des adsorbierten Bitumen $d_{\rm M}^{\rm ad}$ sind wenige $\mu m\,[101]$. Die neuen Einschlussvolumina bestimmen sich mit

$$c_{\rm I,1} = \frac{V_I}{V_{\rm I} + V_M^{\rm ad}} \tag{6.13}$$

$$c_{\rm I,2} = \frac{V_{\rm I} + V_{M}^{\rm ad}}{V_{\rm I} + V_{\rm M}^{\rm ad} + \tilde{V}_{\rm M}}$$
(6.14)

$$c_{\rm I,3} = \frac{V_{\rm P}}{V_{\rm I} + V_{\rm M}^{\rm ad} + \tilde{V}_{\rm M} + V_{\rm P}} \,. \tag{6.15}$$

MAIDANOVA [63] zeigt, dass auch bereits der Füller Teile der Maltenephase adsorbiert. Die zusätzliche Aussteifung ist in den hier verwendeten Mastixversuchen theoretisch enthalten. Da die Einschlussverteilung aber sehr gering ist, ist es möglich, dass der Effekt in den für die Parameterbestimmung verwendeten Versuchen nicht zu beobachten ist, da der Einfluss mit sinkendem Einschlussvolumen abnimmt.

Zur Überprüfung der These werden die Zugversuche verwendet. Die Datenlage ist hier besser und es wird erwartet, dass der versteifende Effekt bei hohen Temperaturen einen größeren Einfluss hat, da die Differenz der Steifigkeit zwischen



Abbildung 6.7: Erweiterte Homogenisierung

Bitumen und adsorbiertem Bitumen größer wird. Die Schichtdicke des adsorbierten Bitumens wird als konstant angenommen. Es wird davon ausgegangen das die Adsorption der Maltenephase während des Mischvorgangs stattfindet und dann abgeschlossen ist. Auch wenn Bitumen bereits bei hohen Temperaturen im Sommer verflüssigt, soll dies zunächst keinen weiteren Einfluss haben. Ob eine nachträgliche Adsorption auftritt, muss in weiteren Untersuchungen abschließend geklärt werden.

Aus den vorhanden Versuchen wird die Dicke der adsorbierten Bitumenschicht zu $d_{\rm M}^{\rm ad} = 6\,\mu m$ bestimmt. Der adsorbierte Bitumenanteil beträgt damit $c_{\rm AB}^{\rm ad} = 0,19$ und $c_{\rm SMA}^{\rm ad} = 0,255$ des gesamten Bitumens. Dies erscheint plausibel und entspricht etwa der Größenordnung bis 36% welche in [101] für weitere Asphalte ermittelt wird. Als Bezugssteifigkeit wird der E-Modul des Bitumens gewählt. Die Abweichung κ von der bisherigen Temperaturabhängigkeit nach Gleichung (4.33) ist

$$\kappa(\theta) = 0.926e^{(-0.058\cdot\theta)} + 0.125e^{(2.2\cdot\theta)} \tag{6.16}$$

und der E-Modul des versteiften Bitumens beträgt

$$E_{\rm M}^{\rm ad}(\theta) = \kappa(\theta) E_{\rm M}^{\rm el}(\theta) \,. \tag{6.17}$$

Mit dem modifizierten Modell sollen nun erneut die Zugversuche berechnet werden. Durch die Abhängigkeit von der spezifischen Oberfläche ist eine bessere Unterscheidung der verschiedenen Sieblinien zu erwarten. Abbildung 6.8 und Abbildung 6.9 zeigen die Ergebnisse des erweiterten Modells. Die adsorbierte Bitumenschicht, sowie die durch die Mikrostruktur begründete Veränderung der Temperaturabhängigkeit zeigen einen positiven Einfluss auf die Entwicklung der Steifigkeiten. Der Vergleich mit Abbildung 6.2 und Abbildung 6.3 zeigt die Verbesserung der Simulationsergebnisse. Der AC 11 wird für $\theta = 30$ °C für die die langsamen Dehnraten weiterhin unterschätzt. Die Steifigkeitsprognose



Abbildung 6.8: Zugversuche AC 11, erweitertes Modell



Abbildung 6.9: Zugversuche SMA 11, erweitertes Modell



Abbildung 6.10: Relation der Spannungen AC 11/SMA 11

bei $\theta = 20$ °C ist hingegen sehr gut. Abweichungen liegen im Toleranzbereich der experimentellen Untersuchung. Qualitativ gilt dies auch für den SMA 11. Die Ergebnisse für $\theta = 30$ °C sind als sehr gut anzusehen.

Abbildung 6.10 zeigt das Verhältnis der Spannungen von AC 11 und SMA 11 bei $\varepsilon = 1,0 \cdot 10^{-3}$ für $\theta = 20$ °C und $\theta = 30$ °C. Dabei wird sowohl die Standardformulierung wie auch die erweiterte Formulierung betrachtet. Es wird deutlich, dass sich nicht nur die Absolutwerte der Spannungen verändern. Der Einfluss des auf der Oberfläche adsorbierten Bitumens ist auch in den Relativwerten zu erkennen. Die Spannungen im AC 11 nehmen stärker zu als im SMA 11. Dies ist auf die höhere Menge adsorbierten Bitumens zurück zu führen. Für $\theta = 20$ °C nehmen die Spannungen im Standardmodell des AC 11 mit steigender Dehnrate deutlich schneller zu als für $\theta = 20$ °C, wo das Verhältnis nahezu konstant ist. Der Vergleich der Modelle zeigt, dass unabhängig von der Temperatur die Spannungen im AC 11 stärker zunehmen als im SMA 11. Dabei ist eine leichte Rückläufigkeit für zunehmende Dehnraten festzustellen. Zusammenfassend wird festgehalten, dass mit der vorgestellten Modellerweiterung um eine Schicht versteiften Bitumens die Prognosegenauigkeit des Werkstoffmodells wesentlich verbessert wird.

6.5 Asphaltmischungen nach RStO

Abschließend wird der Umfang des erarbeiteten Werkstoffmodells an verschiedenen Asphaltmischungen gezeigt. Die Mischungsverhältnisse richten sich nach den TECHNISCHEN LIEFERBEDINGUNGEN FÜR ASPHALTMISCHGUT FÜR DEN BAU VON VERKEHRSFLÄCHENBEFESTIGUNGEN [31]. Unabhängig von der Mischung wird das Bitumen 50/70 verwendet und das Füller-Bitumen-Verhältnis von



Abbildung 6.11: Sieblinien untersuchter Asphalte

 $\approx 1,3$ beibehalten. Das entspricht dem in Kapitel 4 untersuchten Bitumen. Untersucht werden die Asphalte AB 16 BN, AB 22 TN und SMA 8 N. Die zugehörigen Sieblinien sind Abbildung 6.11 zu entnehmen. Dabei sind die Sieblinien so gewählt, dass sie etwa dem Mittelwert der in den technischen Lieferbedingungen angegebenen Grenzen entsprechen.

Die Mischungsverhältnisse sowie die für das erweiterte Modell notwendigen Einschlussanteile $c_{1,1}, c_{1,2}$ und $c_{1,3}$ sind in Tabelle 6.3 angegeben. Der geringe Unterschied der Sieblinien des AB16 BN und AB 22 TN zeigt sich auch in den Ergebnissen in Abbildung 6.12a. Die Asphalte sind dafür konstant 3.600 s = 1 h mit $\sigma = 1 N/mm^2$ belastet und dann eine weitere Stunde entlastet. Untersucht werden die Temperaturen $\theta = 10$ °C und $\theta = 20$ °C. Die Unterschiede in der Sieblinie zwischen dem AB16 BN und AB 22 TN sind gering. Der kleine Anteil an Körnung größer 16 mm zeigt auch nur geringe Auswirkungen auf die Steifigkeit. Der SMA 8 N hingegen hat mit der Ausfallkörnung zwischen 5,6 mm und 8 mm eine deutlich abweichende Sieblinie von den Asphaltbetonen. Wie im zuvor betrachteten Vergleich zwischen AC 11 und SMA 11 zeichnet sich dies durch eine niedrige Viskosität während der Kriechphase aus. Mit steigender Temperatur nimmt dieser Einfluss zu. Inbesondere der SMA zeigt bei der Entlastung größe viskoelastische Anteile. Der qualitative Vergleich mit Abbildung 6.5 zeigt, dass diese weiterhin zu groß sind.

Weitere Forschungsansätze mit dem Schwerpunkt, die Veränderungen im Korngerüst während einer Belastungsphase zu beschreiben sind notwendig. Die resultierenden viskoplastischen Dehnungsanteile entstehen, wenn das das Korngerüst das Bitumen lokal verdrängt. Abbildung 6.12b zeigt den Einfluss der Sieblinie

	$m_{\rm M} \left[M. \% \right]$	$m_{\rm F} \left[M. \% \right]$	$c_{\mathrm{P}}\left[V.\% ight]$	$c_{I,1}\left[- ight]$	$c_{I,2}\left[- ight]$	$c_{I,3}\left[- ight]$
AB16BN	5,5	7,15	4,0	0,9479	0,8520	$0,\!040$
AB 22 TN	4,5	5,85	5,5	0,9541	0,8801	$0,\!055$
SMA 8 N	7,7	10,0	2,5	0,9402	0,7881	$0,\!025$

Tabelle 6.3: Mischungsbeschreibung



(a) $\sigma - t$ -Diagramm, Asphalte nach Tabelle 6.3



(b) Vergleich AB16 mit AB22, gleiche Mischungsverhältnisse

Abbildung 6.12: $\sigma-t-{\rm Diagramme}$ verschiedener Asphaltsorten

zwischen AB 16 BN und AB 22 TN. Dafür wird der AB 22 TN mit dem gleichen Bitumen-, Füller- und Porengehalt wie der AB 16 BN simuliert. Die höhere Viskosität des AB 16 BN resultiert aus der größeren spezifischen Oberfläche im Kiesbereich der Sieblinie. Der SMA 8 zeichnet sich durch den hohen Bitumenanteil sowie Füllergehalt aus. Da die Oberfläche des Füllers nicht berücksichtigt wird, ist der Asphalt insgesamt sehr weich.

Zur Verdeutlichung des Temperature
influsses sowie der Akkumulation viskoser Dehnungen wird als letztes Beispiel eine periodische Belastungssituation über den Verlauf von 48 h im Februar simuliert. Dafür werden die genannten Asphalte nach Tabelle 6.3, sowie der AC 11 und SMA 11 gegenübergestellt. In Abbildung 6.13a ist der Temperaturverlauf des 28.2.2016 und 29.2.2016 in Braunschweig dargestellt. Die Wetterdaten sind der Klimastation des Leichtweiß-Instituts für Wasserbau der TU Braunschweig [62] entnommen. Der Asphalt wird über die 48 h im Wechsel jeweils für 1 h be- und entlastet. Die Last wird mit 1,25 N/mm² angesetzt. Dies entspricht einer 10-t-Achse bei einer quadratischen Aufstandsfläche von 20 × 20 cm². Die Dehnungen sind um die volumetrischen Anteile aus Temperatureinfluss

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\theta} = \alpha_T \dot{\boldsymbol{\theta}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{6.18}$$

ergänzt. α_T wird nach [13] zu $\alpha_T = 3,0.10^{-5} 1/K$ gesetzt. Einen möglichen nichtlinearen Zusammenhang von α_T und der Temperatur diskutiert GARTUNG.

Deutlich zu erkennen ist der Einfluss der Temperatur sowie die Akkumulation viskoplastischer Dehnungen. Während der ersten Erwärmung am Vormittag wird das Bitumen nachgiebiger. Insbesondere die Splittmastixasphalte verformen sich aufgrund des hohen Bitumengehalts in dieser Zeit stark. Mit der Abkühlung über Nacht stabilisiert sich das Dehnungsniveau. Die Kriechraten sind wegen der temperaturabhängig formulierten Ableitungsordnung α deutlich geringer. Diese nimmt während Warmperiode am 29. Februar wieder zu. Erneut steigen die Dehnungen an und stabilisieren sich während der kühlen Nacht. Da die Dehnungen bzw. das Kriechmaß nicht beschränkt sind, setzt sich der stufenförmige Verlauf bei längerer Simulationsdauer mit diesem Erwärmungs- und Abkühlverhalten fort. Die charakteristische Abstufung zwischen den Asphaltbetonen und den Splittmastixasphalten wird gut wieder gegeben. Die temperaturbedingten Dehnungen sind aufgrund der geringen Temperaturdifferenz sehr gering. In einem Straßenkörper mit behinderten Querdehnungen verursachen sie einen volumetrischen Spannungszustand.



Abbildung 6.13: Asphalte bei periodischer Belastung

7 Zusammenfassung und Ausblick

Für eine effektive Bemessung von Straßen in Asphaltbauweise ist die Berücksichtigung des Langzeitverformungsverhaltens wichtig. Die Norm berücksichtigt dies mit empirischen Ansätzen aus Bau- und Nutzungsphase qualitativ. Mit Hilfe computergestützter Berechnungsmethoden und leistungsfähigen Werkstoffmodellen können die Verfahren der Norm ergänzt werden. Insbesondere das thermo-mechanische Werkstoffverhalten kann mit modernen Werkstoffmodellen gut abgebildet werden. In dieser Arbeit ist ein Werkstoffmodell entstanden, welches Asphalt mit den Phasen Bitumen, Mineralstoff und Luftporenraum beschreibt. Das Verbundmodell ist aus mikromechanischen Ansätzen der Kontinuumsmechanik erarbeitet. Verschiedene Konzepte und Verfahren werden untersucht und aus diesen das *Generalized Self-Consistent Scheme* als am geeignetsten ausgewählt. Das Homogenisierungsverfahren für inelastische Dehnungsanteile wird für die Anwendung im Zeitbereich aufgearbeitet. Eingangsparameter sind die Werkstoffmodelle der Komponenten des Asphalts.

Das Bitumen ist mit Hilfe fraktionaler Zeitableitungen beschrieben. Mit diesem mathematisch komplexen Konzept gelingt die Beschreibung der Matrixphase mit dem fraktionalen Maxwell-Modell. Die verwendete Reihenentwicklung für die mathematische Beschreibung reellwertiger Ableitungen eignet sich dabei in besonderer Weise sowohl für die Verwendung in numerischen Berechnungen wie auch für das verwendete Homogenisierungsverfahren. Das Modell wird an Versuchsdaten für ein Bitumen 50/70 validiert. Die notwendigen Modellparameter sind mit einer Evolutionsstrategie ermittelt. Die Beschreibung des Bitumenverhaltens ist dabei für ein breites Temperatur- und Belastungsspektrum sehr gut.

Die Beschreibung des Korngerüsts ist durch das GSCS implizit erfasst. Das Einzelkorn wird dabei mit HOOKE'schen Werkstoffverhalten bzw. für die Homogenisierung inelastischer Anteile mit einem Starrkörper beschrieben. Die Sieblinie wird mit dem Kornvolumen erfasst und für die Homogenisierung verwendet. Eine Modellerweiterung zeigt, dass die Beschreibung mit der spezifischen Kornoberfläche die Ergebnisse verbessern kann, da die Unterschiede in den Sieblinien mehr hervorgehoben werden können.

Das Verbundmodell wird an den Asphalten AC 11 und SMA 11 validiert. Die verwendeten Versuche sind kritisch hinterfragt, da die Probekörperabmessungen als zu klein anzusehen sind. Das Verbundmodell ist in der Lage sowohl für den AC 11 wie auch den SMA 11 das thermo-mechanische Verformungsverhalten gut

wieder zu geben. Für hohe Temperaturen wird der Einfluss des Bitumens jedoch überschätzt. Die Erweiterung um eine zusätzliche Phase adsorbierten Bitumens auf der Kornoberfläche verbessert die Prognosegenauigkeit. Der Leistungsumfang des Modells wird an weiteren Mischungen gezeigt. Die Abstufungen der Asphalte können dabei gut wieder gegeben werden. Für die Verwendung in numerischen Simulationen ist das Verbundmodell vollständig aufbereitet. Eine einfache Implementierung in bestehende FE-Programm ist somit möglich und das Verbundmodell kann zur Berechnung von Straßenquerschnitten verwendet werden.

Die Auswirkungen des Korngerüsts müssen weiter untersucht werden. Die Verdichtung und eventuelle Entmischung wird vom Modell zur Zeit nicht berücksichtigt. Insbesondere bei hohen Temperaturen ist dies stärker zu berücksichtigen. Vorschläge für ein Versuchsprogramm sowie eine mögliche Formulierung von $c_I(\varepsilon)$ sind in der Arbeit enthalten. Die Formulierung mit internen Variablen ermöglicht zusätzlich die einfache Ergänzung von Schädigungsformulierungen, auch auf Ebene der Konstituierenden. Zur Absicherung des Verbundmodells ist eine breitere Datenbasis notwendig. Insbesondere sind weitere Bitumen zu untersuchen, um den Einfluss des Bitumens und der Zuschläge besser prognostizieren zu können.

Literaturverzeichnis

- J. Aboudi, S. Arnold & B. Bednarcyk: Micromechanics of Composite Materials. Elsevier, 2013.
- [2] S. Aflaki & P. Hajikarimi: Implementing viscoelastic rheological methods to evaluate low temperature performance of modified asphalt binders. Construction and Building Materials 36, 2012, 110 - 118.
- [3] H. Ahrens & D. Dinkler: *Finite-Element-Methoden Teil II.* Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 1996.
- [4] E. Aigner, R. Lackner & C. Pichler: Multiscale prediction of viscoelastic properties of asphalt concrete. Journal of Materials in Civil Engineering 21, 2009, 771 - 780.
- S. Alam & F. Hammoum: Viscoelastic properties of asphalt concrete using micromechanical self-consistent model. Archives of Civil and Mechanical Engineering 15, 2015, 272 - 285.
- [6] L. Aschenbrenner: Mehrkomponenten-Modell zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Asphalt. Berichte Institut für Statik 2006-103, Technische Universität Braunschweig, Institut für Statik, 2006.
- [7] R. Bailey, W. Vavrik, G. Huber, W. Pine & S. Carpenter: Bailey method for gradation selection in hma mixture design. Transportation Research Circular 2002.
- [8] Y. Benveniste: Revisiting the generalized self-consistent scheme in composites: Clarification of some aspects and a new formulation. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 56, 2008, 2984 - 3002.
- [9] S. Berbenni, F. Dinzart & H. Sabar: A new internal variables homogenization scheme for linear viscoelastic materials based on an exact eshelby interaction law. Mechanics of Materials 81, 2015, 110 – 124.
- [10] F. Bonemazzi & C. Giavarini: Shifting the bitumen structure from sol to gel. Journal of Petroleum Science and Engineering 22, 1999.
- [11] N. Bonfoh, V. Hounkpati & H. Sabar: New micromechanical approach of the coated inclusion problem: Exact solution and applications. Computational Materials Science 62, 2012, 175 – 183.

- [12] R. Brenner & R. Masson: Improved affine estimates for nonlinear viscoelastic composites. European Journal of Mechanics - A/Solids 24, 2005, 1002 - 1015.
- [13] B. Brodersen: Modellierung des thermo-mechanischen Verbundverhaltens von Asphalt in Straßenaufbauten. Berichte Institut für Statik 2012-114, Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 2012.
- [14] A. Carpinteri & F. Mainardi, Herausgeber: Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Bd. 378 von CISM Courses and Lectures. Springer Verlag, Wien and New York, 1997.
- [15] P. Castañeda: The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 39, 1991, 45 – 71.
- [16] D. Castillo, S. Caro, M. Darabi & E. Masad: Studying the effect of microstructural properties on the mechanical degradation of asphalt mixtures. Construction and Building Materials 93, 2015, 70 - 83.
- [17] C. Celauro, C. Fecarotti, A. Pirrotta & A. Collop: Experimental validation of a fractional model for creep/recovery testing of asphalt mixtures. Construction and Building Materials 36, 2012, 458 - 466.
- [18] J. Chaboche & G. Rousselier: On the plastic and viscoplastic constitutive equations - part i and part ii. J. Pressure Vessel Technology (ASME) 105, 1983, 153 - 164.
- [19] R. Christensen: Two theoretical elasticity micromechanics models. Journal of Elasticity 50, 1998, 15 – 25.
- [20] R. Christensen & K. Lo: Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 27, 1979, 315 - 330.
- [21] R. M. Christensen: A critical evaluation for a class of micro-mechanics models. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 38, 1990, 379 – 404.
- [22] E. Coleri, J. T. Harvey, K. Yang & J. M. Boone: A micromechanical approach to investigate asphalt concrete rutting mechanisms. Construction and Building Materials 30, 2012, 36 - 49.
- [23] M. Darabi, R. Abu Al-Rub, E. Masad & D. Little: Cyclic hardeningrelaxation viscoplasticity model for asphalt concrete materials. Journal of Engineering Mechanics 139, 2013, 832 – 847.
- [24] F. Dinzart & H. Sabar: Homogenization of the viscoelastic heterogeneous materials with multi-coated reinforcements: An internal variables formulation. Archive of Applied Mechanics 84, 2014, 715 - 730.

- [25] I. Doghri, L. Adam & N. Bilger: Mean-field homogenization of elastoviscoplastic composites based on a general incrementally affine linearization method. International Journal of Plasticity 26, 2010, 219 - 238.
- [26] D.-X. Du & Q.-S. Zheng: An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 49, 2001, 2765 - 2788.
- [27] D.-X. Du & Q.-S. Zheng: A further exploration of the interaction direct derivative (idd) estimate for the effective properties of multiphase composites taking into account inclusion distribution. Acta Mechanica 157, 2002, 61 - 80.
- [28] N. Ford & A. Simpson: The numerical solution of fractional differential equations: Speed versus accuracy. Numerical Algorithms 26, 2003.
- [29] Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen: Richtlinien für die rechnersiche Dimensionierung des Oberbaus von Verkehrsflächen mit Asphaltdeckschicht, 2009.
- [30] Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen: Richtlinien für die Standardisierung des Oberbaus von Verkehrsflächen, 2012.
- [31] Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen, Arbeitsgruppe Asphaltbauweisen: Technische Lieferbedingungen für Asphaltmischgut für den bau von Verkehrsflächenbefestigungen, 2013.
- [32] Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen, Arbeitsgruppe Asphaltbauweisen: Zusätzliche Technische Vertragsbedingungen und Richtlinien für den Bau von Verkehrsflächenbefestigungen aus Asphalt, 2013.
- [33] Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen, Arbeitsgruppe Gesteinskörnungen, Ungebundene Bauweisen: Technische Lieferbedingungen für Gesteinskörnungen im Straßenbau, 2007.
- [34] W. Fuller & S. Thompson: The laws of proportioning concrete. Transactions of the American Society of Civil Engineers LIX, 1907, 67 – 143.
- [35] G. Gajári: Modellierung bleibender Verformungen des Asphalts mit einem hypoplastischen Stoffgesetz der Bodenmechanik. Dissertation, Technische Universität Dresden, Fakultät Bauingenieurwesen, 2012.
- [36] G. Gajári, F. Wellner & I. Herle: Das mechanische Verhalten des Walzasphalts bei 60° C unter zyklischer Belastung. Straße und Autobahn 1, 2016.
- [37] T. Gartung: Berechnung von Asphaltstraßen mit einem einheitlichen rheologischen Konzept einschließlich Schädigung. Berichte Institut für Statik 96-82, Technische Universität Braunschweig, Institut für Statik, 1996.
- [38] P. Georgiou, L. Sideris & A. Loizos: Evaluation of the effects of gyratory and field compaction on asphalt mix internal structure. Materials and Structures/Materiaux et Constructions 2015.
- [39] D. Gross & T. Seelig: Bruchmechanik mit einer Einführung in die Mikromechanik. Springer-Verlag, 2011.
- [40] Z. Hashin: The elastic moduli of heterogeneous materials. Journal of Applied Mechanics 29, 1962, 143 – 150.
- [41] Z. Hashin & S. Shtrikman: A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 11, 1963, 127 - 140.
- [42] E. Hervé & A. Zaoui: n-layered inclusion-based micromechanical modelling. International Journal of Engineering Science 31, 1993, 1 – 10.
- [43] N. Heymans & J.-C. Bauwens: Fractal rheological models and fractional differential equations. Rheologica Acta 33, 1994, 210 – 219.
- [44] J. Hristova, V. Valeva & J. Ivanova: Aging and filler effects on the creep model parameters of the thermoset composites. Composites Science and Technology 62, 2002, 1097 - 1103.
- [45] C. Huet: Étude, par une méthode d'impédance, du comportement viscoélastique des matériaux hydrocarbonés. Dissertation, Faculté des sciences de l'université de Paris, Paris, 1965.
- [46] A. Jäger: Characterization of viscoelastic properties of bitumen by means of nanoindentation as basis for multiscale modeling of asphalt. Fachbeitrag 21, Institut für Straßenbau und Straßenerhaltung, TU Wien, 2008.
- [47] H. Kai-Xin & Z. Ke-Qin: Mechanical analogies of fractional elements. Chinese Physics Letters 26, 2009.
- [48] B. Klusemann & B. Svendsen: Homogenization methods for multi-phase elastic composites: Comparison and benchmarks. Technische Mechanik 30, 2010.
- [49] S. Koczyk: Lineare viskoelastizität in differentieller darstellung. Technische Mechanik 17, 1997.
- [50] R. Koeller: Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. Journal of Applied Mechanics 51, 1984, 299 – 307.
- [51] J. Krishnan & K. Rajagopal: On the mechanical behavior of asphalt. Mechanics of Materials 37, 2005, 1085 – 1100.
- [52] N. Lahellec & P. Suquet: Effective behavior of linear viscoelastic composites: A time-integration approach. International Journal of Solids and Structures 44, 2007, 507 - 529.

- [53] N. Lahellec & P. Suquet: On the effective behavior of nonlinear inelastic composites: I. incremental variational principles. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 55, 2007, 1932 – 1963.
- [54] N. Lahellec & P. Suquet: On the effective behavior of nonlinear inelastic composites: Ii: A second-order procedure. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 55, 2007, 1964 – 1992.
- [55] M. Lefik, D. Boso & B. Schrefler: Generalized self-consistent homogenization using the finite element method. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 89, 2009, 306 – 319.
- [56] J. Lemaitre: Handbook of Materials Behavior Models. Academic Press, 2001.
- [57] D. Lesueur: The colloidal structure of bitumen: Consequences on the rheology and on the mechanisms of bitumen modification. Advances in Colloid and Interface Science 145, 2009, 42 - 82.
- [58] B. Lira, D. Jelagin & B. Birgisson: Gradation-based framework for asphalt mixture. Materials and Structures/Materiaux et Constructions 46, 2013, 1401 - 1414.
- [59] T. Liu, X.-N. Zhang, Z. Li & Z.-Q. Chen: Research on the homogeneity of asphalt pavement quality using x-ray computed tomography (ct) and fractal theory. Construction and Building Materials 68, 2014, 587 - 598.
- [60] L. Loeber, G. Muller, J. Morel & O. Sutton: Bitumen in colloid science: a chemical, structural and rheological approach. Fuel 77, 1998.
- [61] M. Lévesque, M. Gilchrist, N. Bouleau, K. Derrien & D. Baptiste: Numerical inversion of the laplace-carson transform applied to homogenization of randomly reinforced linear viscoelastic media. Computational Mechanics 40, 2007, 771 – 789.
- [62] LWI Klimastation: Institut für Hydrologie, Wasserwirtschaft und Gewässerschutz, TU Braunchweig. http://lwi-klimastation.tu-bs.de/index.htm, Besucht am: 24.08.2016, 2016.
- [63] N. Maidanova & D. Rozental: Asphalt adsorption in relation to the surface area of the mineral filler and content of aromatic oils. Russian Journal of Applied Chemistry 79, 2006.
- [64] R. Masson, M. Bornert, P. Suquet & A. Zaoui: Affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 48, 2000, 1203 – 1227.
- [65] B. Miled, I. Doghri, L. Brassart & L. Delannay: Micromechanical modeling of coupled viscoelastic-viscoplastic composites based on an incrementally affine formulation. International Journal of Solids and Structures 50, 2013, 1755 - 1769.

- [66] K. Mollenhauer: Dimensionierungsrelevante Prognose des Ermüdungsverhaltens von Asphalt mittels einaxialer Zug-Schwellversuche. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, Institut für Straßenwesen, 2008.
- [67] T. Mori & K. Tanaka: Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. Acta Metallurgica 21, 1973, 571 – 574.
- [68] Y. Mouton: Organic Materials in Civil Engineering. ISTE Ltd, 2006.
- [69] S. Mukherjee & G. Paulino: The elastic-viscoelastic correspondence principle for functionally graded materials, revisited. Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME 70, 2003, 359–363.
- [70] A. Muliana & J. Kim: A concurrent micromechanical model for predicting nonlinear viscoelastic responses of composites reinforced with solid spherical particles. International Journal of Solids and Structures 44, 2007, 6891 - 6913.
- [71] T. Mura: Micromechanics of Defects in Solids, Bd. 3 von Mechanics of Elastic and Inelastic Solids. Springer Netherlands, 1987.
- [72] M. Oeser: Nichtlineare numerische Simulationsmodelle fuer Verkehrswegebefestigungen unter Beruccksichtigung von mechanischen, thermischen und hydraulischen Einwirkungen: Habilitation. Schriftenreihe Professur für Straßenbau, Nr. 18, Technische Universität Dresden, 2010.
- [73] F. Olard & D. Perraton: On the optimization of the aggregate packing characteristics for the design of high-performance asphalt concretes. Road Materials and Pavement Design 11, 2010, 145 - 169.
- [74] K. Oldham & J. Spanier: The Fractional Calculus, Bd. 111 von Mathmatics in Science and Engineering. Academic Press, Inc., 1974.
- [75] P. Peryzna: Fundamental problems in viscoplasticity. Advances in Applied Mechanics 9, 1966, 244 – 377.
- [76] C. Pichler & R. Lackner: Upscaling of viscoelastic properties of highlyfilled composites: Investigation of matrix-inclusion-type morphologies with power-law viscoelastic material response. Composites Science and Technology 69, 2009, 2410 - 2420.
- [77] C. Pichler, R. Lackner & E. Aigner: Generalized self-consistent scheme for upscaling of viscoelastic properties of highly-filled matrix-inclusion composites - application in the context of multiscale modeling of bituminous mixtures. Composites Part B: Engineering 43, 2012, 457 - 464.
- [78] O. Pierard & I. Doghri: An enhanced affine formulation and the corresponding numerical algorithms for the mean-field homogenization of elastoviscoplastic composites. International Journal of Plasticity 22, 2006, 131 – 157.

- [79] J. Podlubny: Fractional Differential Equations, Bd. 198 von Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, Inc., 1999.
- [80] H. Pohlheim: Evolutionäre Algorithmen Verfahren, Operatoren und Hinweise für die Praxis. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
- [81] G. Polacco, J. Stastna, D. Biondi & L. Zanzotto: Relation between polymer architecture and nonlinear viscoelastic behavior of modified asphalts. Current Opinion in Colloid and Interface Science 11, 2006, 230 - 245.
- [82] Y. Rabotnov: Creep Rupture. Proc. XII Int. Congr. Appl. Mech. (Stanford 1968). Springer, 1969.
- [83] J. Read & D. Whiteoak: The Shell Bitumen Handbook. Thomas Telford, 2003.
- [84] A. Rekik, F. Auslender & M. Bornert: A set of enhanced formulations for existing nonlinear homogenization schemes and their evaluation. European Journal of Mechanics - A/Solids 50, 2015, 1 – 16.
- [85] A. Rekik, M. Bornert & F. Auslender: A critical evaluation of local field statistics predicted by various linearization schemes in nonlinear meanfield homogenization. Mechanics of Materials 54, 2012, 1 – 17.
- [86] R. Robertson: Chemical Properties of Asphalts and Their Relationship to Pavement Performance. Strategic Highway Research Program, Washington, 1991.
- [87] E. Sangsefidi, H. Ziari & M. Sangsefidi: The effect of aggregate gradation limits consideration on performance properties and mixture design parameters of hot mix asphalt. KSCE Journal of Civil Engineering 2015.
- [88] R. Schapery: Correspondence principles and a generalized integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media. International Journal of Fracture 25, 1984, 195 – 223.
- [89] R. A. Schapery: On the characterization of nonlinear viscoelastic materials. Polym Eng Sci 1969, 295 – 310.
- [90] R. A. Schapery: Deformation and fracture characterization of inelastic composite materials using potentials. Polym Eng Sci 27, 1987, 63 - 76.
- [91] T. Schüler, R. Manke, R. Jänicke, M. Radenberg & H. Steeb: Multiscale modelling of elastic/viscoelastic compounds. ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik 93, 2013, 126 - 137.
- [92] A. Schmidt & L. Gaul: Implementation von stoffgesetzen mit fraktionalen ableitungen in die finite element methode. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 83, 2002.

- [93] S. Shen & H. Yu: Characterize packing of aggregate particles for paving materials: Particle size impact. Construction and Building Materials 25, 2011, 1362 - 1368.
- [94] A. Shenoy, N. Shashidhar, X. Zhong & E. Bastian Jr.: Investigating the role of aggregate structure in asphalt pavements. Fachbeitrag, Turner-Fairbank Highway Research Center, 2000.
- [95] A. Singh, A. Das & S. Basu: A numerical study on the effect of aggregate gradation on mechanical response of asphalt mix. KSCE Journal of Civil Engineering 16, 2012, 594 - 600.
- [96] M. Smith: Stone: Building stone, rock fill and armourstone in construction, Bd. 16 von Engineering Geology Special Publications. Geological Society London, 1999.
- [97] S. Sridharan: Nonlinear viscoelastic analysis of composites using competing micromechanical models. Journal of Composite Materials 40, 2006, 257 - 282.
- [98] H. Stehfest: Algorithm 368 numerical inversion of laplace transforms. Communications of the ACM 13, 1970, 47 - 49.
- [99] F. Tehrani, J. Absi, F. Allou & C. Petit: Investigation into the impact of the use of 2d/3d digital models on the numerical calculation of the bituminous composites' complex modulus. Computational Materials Science 79, 2013, 377 - 389.
- [100] S. Underwood & R. Kim: Viscoelastoplastic continuum damage model for asphalt concrete in tension. Journal of Engineering Mechanics 137, 2011, 732 - 739.
- [101] S. Underwood & Y. Kim: Microstructural association model for upscaling prediction of asphalt concrete dynamic modulus. Journal of Materials in Civil Engineering 25, 2013, 1153 – 1161.
- [102] S. Velske, H. Mentlein & P. Eymann: Strassenbau Strassenbautechnik. Werner Verlag, 2013.
- [103] P.-A. von Wolffersdorff: Hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. Mechanics of Cohesive-Frictional Materials 1, 1996, 251–271.
- [104] T. Weifner & D. Kolymbas: A hypoplastic model for clay and sand. Acta Geotechnica 2, 2007, 103–112.
- [105] M. Williams, R. Landel & J. Ferry: The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. Contribution From The Department Of Chemistry, University Wisconsin 1955.

- [106] E. Winkler: Stone in Architecture. Springer-Verlag, 1994.
- [107] Q. Xu & M. Solaimanian: Modelling linear viscoelastic properties of asphalt concrete by the huet-sayegh model. International Journal of Pavement Engineering 10, 2009, 401 – 422.
- [108] B. Yu, H. & S. Shen: Anisotropic nonlinear elastoviscoplastic model for rutting of asphalt mixtures. Journal of Engineering Mechanics 140, 2014, 242 - 249.
- [109] H. Yu & S. Shen: Impact of aggregate packing on dynamic modulus of hot mix asphalt mixtures using three-dimensional discrete element method. Construction and Building Materials 26, 2012, 302 - 309.
- [110] M. Zahabi, M. Karimi & N. Tabatabaee: Microstructure-based viscoelastoplastic continum model of asphalt concrete. Rilem Bookeseries 11, 2016.
- [111] T. Zohdi & P. Wriggers: An Introduction to Computational Micromechanics. Springer-Verlag, 2008.

Berichte aus dem Institut für Statik ab 2003

Nr.	2003-96	B. HÜBNER: Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechsel-wirkungen
Nr.	2003-97	J. GEISTEFELDT: Stochastische Finite-Element-Methoden mit Anwendung auf aeroelastische Tragsysteme
Nr.	2003-98	O. KNOKE: Beulwiderstände zusammengesetzter Zylinder-Kegel-Schalen
Nr.	2005-99	A. KÖLKE: Modellierung und Diskretisierung bewegter Diskontinuitäten in randgekoppelten Mehrfeldsystemen
Nr.	2006-100	D. DINKLER (HRSG.): Institut für Statik, Lehre und Forschung, 1996-2006
Nr.	2006-101	A. VEHRE: Ein Reduktionsverfahren für FluidStrukturWechselwirkung mit Finiten Raum-Zeit-Elementen
Nr.	2006-102	M. LÖHR: Analyse aeroelastischer Systeme mit Spektralen Stochastischen Finite-Element-Methoden
Nr.	2006-103	L. ASCHENBRENNER: Mehrkomponenten-Modell zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Asphalt
Nr.	2006-104	T. ZÜMENDORF: Ein gradientenabhängiges Modell für Schädigung bei viskoplastischem Materialverhalten
Nr.	2007-105	C. LEPPERT: Mehrphasenmodell für granulare Medien zur numerischen Untersuchung des Phasenübergangs bei der Entleerung von Silos
Nr.	2007-106	V. KRASE: Stability of Municipal Solid Waste Landfills
Nr.	2007-107	J. PONTOW: Imperfektionsempfindlichkeit und Grenzlasten von Schalentragwerken
Nr.	2009-108	M. BECKMANN: Ein gradientenabhängiges Modell für anisotrope Schädigung von Beton unter Berücksichtigung von Porendruck
Nr.	2010-109	P. SUN: Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit aktiver Schwin- gungskontrolle durch piezoelektrische Materialien
Nr.	2010-110	J. VELDE: 3D Nonlocal Damage Modeling for Steel Structures under Earthquake Loading
Nr.	2010-111	K. SCHUSTER: Systemidentifikation und Bauwerksüberwachung mit piezokeramischen Aktuatoren
Nr.	2011-112	S. BENTE: Interaction of Degradation, Deformation and Transport Processes in Municipal Solid Waste Landfills
Nr.	2011-113	L. OSTERMANN: Hochtemperaturverhalten von Beton – Gekoppelte Mehrfeld-Modellierung und numerische Analyse
Nr.	2012-114	B. BRODERSEN: Modellierung des thermo-mechanischen Verbundverhaltens von Asphalt in Straßenaufbauten

- Nr. 2012-115 J. KINDLEIN: Gekoppelte Analyse von Reaktions- und Transportprozessen in Deponiestrukturen
- Nr. 2015-116 F. PASENOW: Modellierung oberflächengekoppelter Mehrfeldsysteme und numerische Analyse rutschender Bodenmaterialien
- Nr. 2015-117 M. SCHAUER: Ein effizienter gekoppelter FEM-SBFEM Ansatz zur Analyse von Boden-Bauwerk-Interaktion im Zeitbereich
- Nr. 2016-118 A. ALFARRA: Numerische Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen mit RANS-Turbunlenzmodellen
- Nr. 2016-119 S. REINSTÄDLER: Modellierung und numerische Analyse der Entleerung von dünnwandigen Silos
- Nr. 2016-120 F. CRAMER: Mehrfeld-Modell für chemisch-physikalische Alterungsprozesse von Beton

Sonderdrucke

Phänomenologische Modelle für Werkstoffe des Bauwesens. Hermann Ahrens zum 60. Geburtstag (1998). Herausgeber: D. Dinkler, U. Kowalsky.

Baustatik-Baupraxis 8. Berichte der Fachtagung am 21. und 22. März 2002 in Braunschweig. Herausgeber: D. Dinkler.

Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig Beethovenstraße 51, 38106 Braunschweig, Deutschland Telefon +49 (0)531/391-3667, Telefax +49 (0)531/391-8116 E-Mail statik@tu-bs.de, Homepage https://www.tu-braunschweig.de/statik